

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт вычислительного моделирования

Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

**Рыжков Илья Игоревич**

**СТРУКТУРЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ  
КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ЧИСТЫХ ЖИДКОСТЯХ  
И МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЯХ  
С ЭФФЕКТОМ ТЕРМОДИФФУЗИИ**

01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико–математических наук

Научный консультант  
доктор физико–математических наук,  
профессор В.К. Андреев

Красноярск — 2014

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>6</b>
<b>Глава 1. Обзор литературы</b>	<b>35</b>
1.1    Измерение коэффициентов диффузии и термодиффузии . . . . .	35
1.2    Конвективная устойчивость смесей . . . . .	43
1.3    Вибрационная конвекция . . . . .	51
1.4    Теплообмен в условиях вынужденной конвекции . . . . .	59
1.5    Групповой анализ уравнений конвекции . . . . .	69
<b>Глава 2. Термодиффузия в смесях</b>	<b>78</b>
2.1    Бинарные смеси . . . . .	78
2.1.1    Общие сведения . . . . .	78
2.1.2    Уравнения движения . . . . .	82
2.1.3    Пример смеси этанол–вода . . . . .	84
2.2    Многокомпонентные смеси . . . . .	88
2.2.1    Теоретическое описание . . . . .	88
2.2.2    Уравнения движения . . . . .	93
2.2.3    Пример тройной смеси . . . . .	94
<b>Глава 3. Групповой анализ уравнений движения смесей</b>	<b>96</b>
3.1    Модель конвекции бинарной смеси . . . . .	96
3.1.1    Групповые свойства . . . . .	96
3.1.2    Преобразования эквивалентности . . . . .	103
3.1.3    Структура допускаемой алгебры операторов . . . . .	107
3.1.4    Оптимальные системы подалгебр . . . . .	112

<b>3.2 Модель конвекции бинарной смеси в плоском случае . . . . .</b>	116
3.2.1 Групповая классификация . . . . .	116
3.2.2 Структура допускаемой алгебры операторов . . . . .	118
3.2.3 Оптимальные системы подалгебр . . . . .	119
<b>3.3 Уравнения движения многокомпонентной смеси . . . . .</b>	124
3.3.1 Групповые свойства . . . . .	124
3.3.2 Исключение коэффициентов перекрестной диффузии . .	126
<b>3.4 Модель вибрационной конвекции бинарной смеси . . . . .</b>	129
3.4.1 Уравнения движения смеси в вибрационном поле . . . . .	129
3.4.2 Групповые свойства . . . . .	131

<b>Глава 4. Конвективная устойчивость</b>	
<b>многокомпонентных смесей</b>	137
<b>4.1 Устойчивость механического равновесия</b>	
<b>в плоском слое . . . . .</b>	137
4.1.1 Постановка задачи . . . . .	137
4.1.2 Принцип монотонности возмущений . . . . .	141
4.1.3 Решение для свободных проницаемых границ . . . . .	146
4.1.4 Решение для твердых непроницаемых границ . . . . .	153
4.1.5 Бинарные смеси . . . . .	158
4.1.6 Тройные смеси . . . . .	162
4.1.7 Пример тройной смеси . . . . .	173
<b>4.2 Устойчивость конвективного движения</b>	
<b>в вертикальном слое . . . . .</b>	174
4.2.1 Постановка задачи . . . . .	174
4.2.2 Решение для длинноволновых возмущений . . . . .	179
4.2.3 Бинарная смесь . . . . .	181
4.2.4 Многокомпонентная смесь . . . . .	181
4.2.5 Механизм неустойчивости . . . . .	185
4.2.6 Длинноволновая неустойчивость в тройной смеси . . . . .	189

## **Глава 5. Разделение смесей в термодиффузионной колонне** 199

<b>5.1 Разделение многокомпонентной смеси</b>	
<b>в плоской колонне . . . . .</b>	199
5.1.1 Постановка задачи . . . . .	199
5.1.2 Построение решения . . . . .	206
5.1.3 Анализ решения . . . . .	211
5.1.4 Влияние зависимости плотности от концентрации . . . . .	218
5.1.5 О диффузии в вертикальном направлении колонны . . . . .	219
5.1.6 Пример тройной смеси . . . . .	222
<b>5.2 Устойчивость конвективного движения в колонне . . . . .</b>	225
5.2.1 Линеаризованная задача . . . . .	225
5.2.2 Бинарные смеси . . . . .	229
5.2.3 Тройные смеси . . . . .	232
5.2.4 Поперечные возмущения . . . . .	239
5.2.5 Пример тройной смеси . . . . .	246
<b>5.3 Влияние высокочастотной вибрации</b>	
<b>на разделение смеси . . . . .</b>	246
5.3.1 Постановка задачи . . . . .	246
5.3.2 Построение решения . . . . .	249
5.3.3 Влияние вибрации на разделение смеси в колонне . . . . .	253

## **Глава 6. Термодиффузия в условиях вынужденной конвекции** 256

<b>6.1 Вынужденная конвекция многокомпонентной смеси в круглой трубе . . . . .</b>	257
6.1.1 Постановка задачи . . . . .	257
6.1.2 Многокомпонентная смесь с эффектами Соре и Дюфора	258
6.1.3 Многокомпонентная смесь с эффектом Соре . . . . .	262
6.1.4 Случай равенства теплового и концентрационного чисел Пекле . . . . .	265
6.1.5 Тепломассообмен при малых числах Пекле . . . . .	269
6.1.6 Влияние эффекта Дюфора . . . . .	271

<b>6.2 Влияние термофореза наночастиц на вынужденную конвекцию наножидкости . . . . .</b>	<b>272</b>
6.2.1 Физические свойства наножидкости вода — оксид алюминия . . . . .	272
6.2.2 Постановка задачи о вынужденной конвекции в трубе . . . . .	280
6.2.3 Влияние термофореза наночастиц на течение и теплообмен в трубе . . . . .	286
6.2.4 Интенсивность теплообмена в трубе . . . . .	291
<b>Глава 7. Устойчивость термокапиллярных течений . . . . .</b>	<b>298</b>
<b>7.1 Устойчивость термокапиллярного течения в жидкком мосте . . . . .</b>	<b>298</b>
7.1.1 Общие сведения . . . . .	298
7.1.2 Постановка задачи . . . . .	300
7.1.3 Обсуждение результатов . . . . .	305
<b>Глава 8. Термовибрационная конвекция в условиях низкой гравитации . . . . .</b>	<b>315</b>
<b>8.1 Исследование термовибрационной конвекции . . . . .</b>	<b>316</b>
8.1.1 Описание эксперимента . . . . .	316
8.1.2 Математическое моделирование . . . . .	320
8.1.3 Выбор параметров эксперимента . . . . .	327
8.1.4 Влияние остаточных ускорений на режимы течения . . . . .	332
8.1.5 Интенсивность термовибрационной конвекции . . . . .	337
8.1.6 Пространственная структура течения . . . . .	342
8.1.7 Интенсификация теплообмена . . . . .	345
<b>8.2 Об интенсивности осредненных течений . . . . .</b>	<b>348</b>
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>353</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>359</b>

# Введение

Процессы тепломассообмена играют ведущую роль во многих природных явлениях и промышленном производстве. Современные технологии производства и обработки материалов, добычи полезных ископаемых, прогнозирования природных явлений требуют наиболее полного и адекватного описания процессов переноса тепла и массы в жидкостях и газах. Последние зачастую представляют собой смеси различных веществ с большим числом компонент. В многокомпонентных системах обнаруживается большое разнообразие переходных процессов и структур благодаря сложному взаимодействию между конвекцией, теплопроводностью, диффузией и перекрестными эффектами [1, 2]. К последним относятся *термодиффузия* и *диффузионная теплопроводность*. Термодиффузией (или эффектом Соре) называют возникновение потока компонентов смеси под действием градиента температуры, а диффузионной теплопроводностью (или эффектом Дюфора) — возникновение потока тепла под действием градиентов концентрации компонентов смеси [3]. Эффект Дюфора существенен в газах, при смешении которых может возникать разность температур порядка нескольких градусов, и пренебрежимо мал в жидкостях, где возникающая разность температур в тысячу раз меньше [3]. Эффект Соре является существенным как в газовых [4], так и в жидких смесях [5].

Явление термодиффузии было впервые экспериментально открыто в жидкостях Карлом Людвигом в 1856 г. Он обнаружил разность концентраций в пробах растворов сульфата натрия, взятых из разных частей неравномерно нагревого сосуда [6]. Спустя 23 года термодиффузия была более подробно исследована Шарлем Соре в водных растворах хлорида натрия и нитрата калия [7]. Раствор помещался в трубу длиной 30 см, концы которой поддерживались при различных постоянных температурах. Анализ проб, проведенный

примерно через 50 дней, показал, что концентрация солей в холодной области больше, чем в нагретой.

В газах эффект термодиффузии был вначале предсказан теоретически Энскогом [8] и независимо от него Чэпменом [9] при разработке молекулярно-кинетической теории газов. Первое экспериментальное подтверждение термодиффузии в газах было получено в опытах Чэпмена и Дутсона [10]. Два резервуара, соединенных трубкой, наполнялись смесью водорода и двуокиси углерода (или двуокиси серы), после чего один из резервуаров нагревался до 200 °С в течение нескольких часов. Анализ проб показал, что содержание водорода в горячем резервуаре было на 2–3 % больше, чем в холодном.

Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования показали важность учета термодиффузии при описании и предсказании процессов переноса тепла и массы. В частности, эффект Соре оказывает существенное влияние на распределение компонентов в месторождениях углеводородов благодаря наличию геотермального градиента [11]. Описание и предсказание состава месторождений чрезвычайно важно для их эффективной разработки и добычи нефти [12]. Диффузия и термодиффузия играют важную роль в термохалинной циркуляции в океанах, связанной с наличием градиентов температуры и солености [13]. Кроме этого, эти явления влияют на геологические процессы в мантии Земли и изливающейся на поверхность магме [14], а также на концентрацию тяжелых элементов в солнечной короне [15]. В живой материи эффект Соре вызывает перенос вещества через клеточные мембранные благодаря наличию небольших градиентов температуры [16]. Термодиффузия широко используется для разделения изотопов в жидких и газовых смесях [17, 18]. В ядерных реакторах термодиффузию окислов урана и плутония также принимают во внимание [19].

Рассмотрим смесь из двух компонент. Пусть  $T$  — температура смеси, а  $C$  — концентрация (массовая доля) одного из компонентов. Будем предполагать, что отклонения температуры и концентрации от средних значений не слишком большие. Тогда плотность потока выбранного компонента смеси (в  $\text{кг}/\text{м}^2 \text{с}$ )

дается формулой

$$\mathcal{J} = -\rho_0(\mathcal{D}\nabla C + \mathcal{D}_T\nabla T), \quad (0.1)$$

где  $\rho_0$  — плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации,  $\mathcal{D}$  — коэффициент диффузии,  $\mathcal{D}_T$  — коэффициент термодиффузии. Первый и второй члены в правой части уравнения (0.1) описывают потоки, возникающие под действием диффузии и термодиффузии соответственно. Заметим, что коэффициент диффузии всегда положителен, в то время как коэффициент термодиффузии может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от вида смеси [5]. При  $\mathcal{D}_T < 0$  ( $\mathcal{D}_T > 0$ ) направления градиента температуры и термодиффузионного потока массы  $-\rho_0\mathcal{D}_T\nabla T$  совпадают (противоположны), в результате чего выбранный компонент смеси перемещается в более нагретую (более холодную) область. Термодиффузия в бинарной смеси называется *нормальной* (*аномальной*), если легкий компонент перемещается в более нагретую (более холодную) область под действием градиента температуры.

Пусть смесь находится в области с непроницаемыми границами в состоянии механического равновесия. В области создается стационарное неоднородное распределение температуры (например, путем подогрева одной части границы и охлаждения другой). Тогда через некоторое время система достигает стационарного состояния, в котором поток массы (0.1) исчезает. В результате в смеси устанавливается градиент концентрации, пропорциональный градиенту температуры

$$\nabla C = -\frac{\mathcal{D}_T}{\mathcal{D}}\nabla T. \quad (0.2)$$

Заметим, что во многих практических случаях разность концентраций, вызванная эффектом Соре, не превышает нескольких процентов. Однако даже такая неоднородность концентрации может существенно повлиять на характер движения смеси и процессы тепломассообмена.

Для описания и предсказания тепломассообмена в смесях необходимо знание коэффициентов переноса (в частности, коэффициентов диффузии и термодиффузии). Эти коэффициенты могут быть вычислены на основе мо-

лекулярно – кинетической теории [8, 9], термодинамики необратимых процессов [3], а также теории стохастических процессов [20]. Указанные теории дают достаточно хорошее совпадение с экспериментальными данными для широкого класса газовых смесей. Эффект термодиффузии в *газовых смесях*, как правило, зависит от размера и массы молекул компонентов. Согласно классической молекулярно–кинетической теории [4], более тяжелые компоненты перемещаются в более холодную область под действием градиента температуры (нормальный эффект Соре). Если компоненты имеют примерно одинаковые молекулярные массы, то в более холодную область перемещаются компоненты, молекулы которых имеют больший размер. В *жидких смесях* характер эффекта термодиффузии в первую очередь определяется силами межмолекулярного взаимодействия, а также зависит от массы, размера и пространственной структуры молекул [5]. В связи с этим коэффициенты переноса существенно зависят от концентрации компонентов смеси. Таким образом, в одной и той же смеси может наблюдаться как нормальный, так и аномальный эффект Соре в зависимости от исходной концентрации. В настоящее время для теоретической оценки коэффициентов диффузии и термодиффузии в жидкостях используется ряд подходов, основанных на феноменологической и статистической термодинамике необратимых процессов [21–24], а также статистической теории равновесных флуктуаций [25, 26]. Подробный обзор существующих моделей можно найти в [27]. В целом, эти модели позволяют предсказать коэффициенты диффузии и термодиффузии для некоторых классов жидкостей бинарных смесей с хорошей точностью. Однако, теория явлений переноса в многокомпонентных жидкостях еще далека от завершения. Экспериментальная проверка имеющихся теоретических моделей затруднена из-за недостатка или отсутствия экспериментальных данных для жидкостных смесей с тремя и большим числом компонентов. В связи с этим разработка методов измерения и получение точных данных по коэффициентам диффузии и термодиффузии имеют огромную важность для развития теории переноса в смесях и ее приложений к описанию явлений природы и промышленных процессов.

Общий принцип измерения коэффициентов диффузии в смесях состоит в создании градиента концентрации, наблюдении за процессом его релаксации и сопоставлении полученных экспериментальных данных с решением уравнения диффузии. Для измерения коэффициентов термодиффузии необходимо создать градиент температуры, который вызывает градиент концентрации. После установления стационарного состояния в системе значение коэффициента термодиффузии бинарной может быть найдено из соотношения (0.2). Для получения точных данных о распределении концентрации могут быть использованы оптические методы, основанные на зависимости показателя преломления лазерного луча от концентрации компонентов [5]. Кроме этого, может быть осуществлен отбор проб в различных частях жидкой смеси и последующий анализ их концентраций.

Экспериментальные методы измерения коэффициентов термодиффузии можно разделить на две группы. К первой группе относятся методы, в которых отсутствие конвекции гарантирует чисто диффузионный тепломассообмен и является необходимым условием корректности измерений (заметим, что соотношение (0.2) справедливо лишь при отсутствии конвекции). В качестве рабочей полости в таких методах часто используется горизонтальный слой, подогреваемый сверху или снизу в поле силы тяжести [28]. В связи с этим возникает проблема конвективной устойчивости механического равновесия в слое. Альтернативным решением проблемы влияния конвекции на процессы тепломассообмена является проведение экспериментов в условиях невесомости [29]. Ко второй группе относятся методы, в которых используется конвекция, возникающая из-за неоднородностей температуры и концентрации в поле силы тяжести. Одним из таких методов является *термодиффузионная колонна*, впервые предложенная Клузиусом и Диккелем для разделения изотопов в газовых смесях [30]. Колонна представляет собой длинный вертикальный слой, боковые стенки которого поддерживаются при различных постоянных температурах. Разделение смеси в поперечном направлении вместе с вертикальным конвективным потоком приводят к возникновению градиента концентрации в

вертикальном направлении, измерение которого позволяет определить коэффициенты термодиффузии. Необходимым условием корректности измерений является устойчивость стационарного конвективного движения в колонне [18]. Другой конфигурацией, используемой для измерения коэффициентов переноса в жидких бинарных смесях с аномальным эффектом Соре, является горизонтальный слой, подогреваемый снизу. Отношение коэффициента термодиффузии к коэффициенту диффузии определяется по критическим параметрам колебательной неустойчивости механического равновесия [31]. Следует отметить, что существующие экспериментальные методы позволяют измерять коэффициенты диффузии и термодиффузии жидких бинарных смесей с хорошей точностью. В начале прошлого десятилетия несколько европейских лабораторий провели измерения этих коэффициентов в одних и тех же бинарных смесях углеводородов различными методами и получили хорошее соответствие результатов (тест Фонтенбло) [32]. В настоящее время ведутся активные исследования по применению существующих методов к тройным смесям, однако объем экспериментальных данных для таких смесей пока остается крайне ограниченным. В связи с этим исследование конвективной устойчивости многокомпонентных смесей в конфигурациях, соответствующих экспериментальным методам измерений, является актуальной задачей.

Условия возникновения конвекции в чистых средах в поле силы тяжести изучены достаточно подробно. Начиная с пионерских работ Бенара [33, 34] и Рэлея [35], этому вопросу посвящено большое число теоретических и экспериментальных исследований. В классических монографиях [36–38] изложены результаты исследований устойчивости равновесных состояний и конвективных течений в чистых жидкостях и бинарных смесях в различных условиях (в том числе с учетом эффекта термодиффузии). Недавно изданная монография [39] содержит большой обзор результатов в области конвективной устойчивости систем с границами раздела. Влияние эффектов сжимаемости жидкости на устойчивость конвективных течений изучалось в монографиях [40, 41]. В то же время, теория конвективной устойчивости многокомпонентных смесей в на-

стоящее время остается слабоизученным направлением. Сложность изучения таких систем связана с наличием нескольких механизмов тепломассообмена: конвекции, теплопроводности, перекрестной диффузии (возникновения потока массы компонента смеси под действием градиентов концентрации других компонентов) и эффекта Соре [42]. В газовых смесях также может быть существенен эффект Дюфора. При изучении таких систем наибольший интерес представляет поиск закономерностей, справедливых для смесей с произвольным числом компонент. Условия возникновения конвекции в многокомпонентных системах во многих случаях могут быть определены с помощью линейной теории устойчивости. Кроме этого, большой интерес представляет изучение нелинейных конвективных режимов, возникающих за порогом неустойчивости [43]. Эти режимы являются примерами так называемых диссипативных структур, возникающих в результате самоорганизации системы в неравновесной среде (в присутствии градиентов температуры и концентрации) [44].

Наряду со свободной конвекцией, возникающей в постоянном поле силы тяжести, в настоящее время активно изучаются конвективные течения в переменных силовых полях. К таким течениям относится вибрационная конвекция — движение, которое возникает в жидкости с градиентом плотности под действием внешней вибрации. Градиент плотности может быть вызван как градиентом температуры, так и градиентом концентрации (если жидкость представляет собой смесь). Если период колебаний много меньше характерных времен (вязкого, теплового, диффузионного), то говорят о вибрациях высокой частоты. В этом случае все величины, характеризующие движение и тепломассообмен, можно разделить на две составляющие: "медленную" осредненную (получается осреднением данной величины по периоду колебаний) и "быструю" пульсационную (представляет собой разность данной величины и ее осреднения). Метод осреднения был впервые применен к задачам конвекции в работе [45]. В монографии [46] изложены результаты исследований конвективных течений, возникающих под действием высокочастотных вибраций, а также вибраций конечной частоты в областях различной геометрии. Изуче-

ние влияния вибрации на поведение жидкостей имеет как фундаментальное, так и прикладное значение. Вибрационная конвекция является одним из механизмов тепломассообмена благодаря наличию осредненных течений, которые могут существовать как в поле силы тяжести, так и в условиях невесомости. В определенных случаях такие течения подобны гравитационной конвекции и могут использоваться для управления поведением жидкостей в космосе и создания искусственной гравитации [47]. Высокочастотные вибрации, возникающие на космических платформах за счет работы различных механизмов, могут оказывать существенное влияние на эксперименты, требующие чисто диффузионного тепломассообмена [48]. К таким экспериментам, в частности, относятся измерения коэффициентов переноса в смесях.

С точки зрения прикладной науки, актуальным является исследование вынужденной конвекции в жидких и газовых смесях. Это направление тесно связано с разработкой новых эффективных методов охлаждения. Миниатюризация современных электронных устройств и повышение их производительности приводят к существенному росту выделяемых тепловых потоков. Одним из перспективных способов интенсификации теплообмена является переход к теплообменным системам с мини- и микроразмерами [49]. Одновременно с миниатюризацией теплообменных устройств быстро развивается направление, связанное с повышением теплопроводности теплоносителя (жидкости) путем добавления в него твердых частиц с высокой теплопроводностью. Исследования показали, что наиболее перспективным является использование жидкостей с частицами нанометровых размеров, которые получили название *наножидкости* [50]. В качестве наночастиц используются керамические частицы (оксиды алюминия, меди, кремния), металлические частицы (алюминий, железо, медь) и углеродные нанотрубки, в качестве базовых жидкостей — вода, этиленгликоль, машинное масло. Добавление наночастиц приводит к повышению теплопроводности базовой жидкости на десятки процентов, а в случае углеродных нанотрубок — в несколько раз. В то же время, было отмечено, что экспериментально измеренные значения теплопроводности наножидкостей за-

частую не укладываются в расчетные модели, разработанные для обычных сусpenзий [51, 52]. В настоящее время одним из важных фундаментальных вопросов является понимание механизмов переноса тепла в наножидкостях. В работе [53] было показано, что на перенос тепла может оказывать влияние пространственная неоднородность концентрации наночастиц, которая возникает под действием броуновской диффузии и термофореза (возникновения потока частиц под действием градиента температуры). В связи с этим исследование влияния диффузии и термофореза наночастиц на вынужденную конвекцию наножидкостей в теплообменных устройствах является актуальной задачей.

Одним из современных направлений в исследовании процессов тепломассообмена в жидких и газовых средах является качественное изучение дифференциальных уравнений, описывающих данные процессы. Инструментом такого изучения служит *групповой анализ* — математическое направление, предметом которого является совместное рассмотрение непрерывных групп Ли преобразований и допускающих эти группы дифференциальных уравнений. Исследование непрерывных групп преобразований началось во второй половине XIX века норвежским математиком Софусом Ли [54]. Современный этап систематического применения методов группового анализа к моделям механики сплошной среды получил развитие в работах школы Л.В. Овсянникова [55–57].

Говорят, что система дифференциальных уравнений допускает группу преобразований зависимых и независимых переменных, если она остается неизменной под действием преобразований этой группы. Допускаемые преобразования также называют *симметриями* уравнений. Симметрии дают важную информацию о свойствах уравнений и представляют собой основу для их классификации и возможного упрощения. Кроме этого, они могут использоваться для построения точных решений, *инвариантных* относительно подгрупп допускаемой группы преобразований [58]. Применение группового анализа к моделям механики сплошной среды особенно эффективно, так как принципы инвариантности относительно тех или иных преобразований закладываются

уже при выводе уравнений движения. Известно, что законы сохранения энергии, импульса и момента импульса в классической механике связаны с инвариантностью физических систем относительно переносов по времени, переносов по пространству и вращений соответственно [59]. В 1991 году Л.В. Овсянниковым была предложена программа ПОДМОДЕЛИ, направленная на полное и систематическое изучение групповых свойств различных моделей механики сплошной среды [60]. В настоящее время эта программа успешно реализуется для уравнений газовой динамики [61], уравнений Эйлера, Навье–Стокса и тепловой гравитационной конвекции [62], микроконвекции, вязкого теплопроводного газа [63] и других. Таким образом, качественное исследование современных моделей, описывающих процессы тепломассообмена в жидких и газовых средах, является актуальной задачей.

**Цель диссертационной работы** заключается в изучении свойств инвариантности математических моделей многокомпонентных смесей методами группового анализа; разработке общих подходов к описанию смесей и исследованию их устойчивости; построении теории устойчивости многокомпонентных смесей в экспериментальных установках для измерения коэффициентов диффузии и термодиффузии; установлении закономерностей влияния термодиффузии на тепломассообмен в условиях вынужденной конвекции; проведении экспериментальных и теоретических исследований термовибрационной конвекции в условиях низкой гравитации.

**Научная новизна** работы заключается в том, что в ней впервые разработаны общие подходы к описанию многокомпонентных смесей с эффектом Соре и исследованию их конвективной устойчивости в различных конфигурациях. Особое внимание удалено установлению общих закономерностей и характеристик устойчивости, справедливых для смесей с произвольным числом компонент. Установлены закономерности поведения многокомпонентных смесей в условиях естественной и вынужденной конвекции. Впервые получено прямое экспериментальное подтверждение существования термовибрационных течений в условиях низкой гравитации.

Научная новизна работы определяется следующими результатами:

- Предложен новый формализм для описания многокомпонентных смесей с эффектом Соре на основе безразмерных параметров — *отношений разделения*. Эти параметры характеризуют отношение градиентов плотности, вызванных градиентами концентраций и температуры в условиях термодиффузационного разделения. Введено понятие *суммарного отношения разделения*, которое не зависит от выбора растворителя. Предложенный формализм позволяет эффективно решать задачи о конвекции в смесях.
- Впервые вычислены группы преобразований, допускаемые уравнениями конвекции бинарной и многокомпонентной смесей с эффектом Соре (решена задача групповой классификации). Выполнена классификация инвариантных решений для двумерных и трехмерных уравнений конвекции бинарной смеси. Установлены групповые свойства осредненных уравнений вибрационной конвекции бинарной смеси.
- Найдено новое преобразование, которое позволяет исключить члены, связанные с перекрестной диффузией, из уравнений конвекции многокомпонентной смеси. Показано, что сила плавучести в уравнении импульса и суммарное отношение разделения инвариантны относительно этого преобразования. Установлена применимость последнего к задачам конвекции в областях с проницаемыми и непроницаемыми границами. Найдено преобразование, которое позволяет исключить члены, характеризующие термодиффузию, из уравнений переноса массы.
- Впервые построена линейная теория устойчивости равновесия в плоском слое многокомпонентной смеси с эффектом Соре. Установлен принцип монотонности возмущений для слоя со свободными / твердыми проницаемыми границами. Найдены критические параметры неустойчивости относительно длинноволновых возмущений в смеси с произвольным числом компонент для твердых непроницаемых границ слоя. Построены карты устойчивости тройных смесей в широкой области параметров. Обнаружено существование длинноволновой колебательной неустойчивости в сме-

сях с тремя и большим числом компонент. Эта неустойчивость имеет место при наличии стабилизирующих и дестабилизирующих градиентов концентрации компонентов с различными диффузионными временами. Выполнено сравнение аналитических и численных результатов для свободных/твёрдых, проницаемых/непроницаемых границ.

- Развита теория разделения многокомпонентных смесей в замкнутой термодиффузионной колонне. Ключевым элементом теории является использование безразмерных отношений разделения. Найдено точное решение, описывающее стационарное движение и разделение многокомпонентной смеси. Впервые показано, что это решение может быть единственным, неединственным, а также может не существовать в зависимости от значений суммарного отношения разделения. В последних двух случаях тяжелые компоненты накапливаются в верхней части колонны, что приводит к потенциально неустойчивой стратификации. Изучено влияние зависимости плотности от концентрации на измеряемые значения коэффициентов термодиффузии. Впервые предложен критерий, при выполнении которого можно пренебречь вертикальной диффузией в колонне. Установлено, что высокочастотная вибрация колонны приводит к уменьшению разделения смеси.
- Впервые построена линейная теория устойчивости стационарного течения в колонне для двух типов возмущений (продольных и поперечных волн). Установлены основные физические механизмы неустойчивости, описаны типичные структуры возмущений. Для поперечных волн доказан аналог принципа монотонности возмущений, а также ряд теорем, характеризующих свойства устойчивости системы для смеси с произвольным числом компонент. Построены карты устойчивости для бинарных и тройных смесей в широкой области параметров.
- Впервые проведено обобщение задачи Греца о теплообмене в круглой цилиндрической трубе с течением Пуазейля на случай многокомпонентной смеси с учетом эффектов Соре и Дюфора. На конечном отрезке трубы

задан постоянный тепловой поток, в остальной части трубы теплоизолирована. Показано, что определение концентраций компонентов сводится к решению задач, аналогичных задаче Греца для однокомпонентной среды. Установлено, что эффект Соре приводит к разделению смеси в поперечном сечении трубы. При малых числах Пекле неоднородности концентрации охватывают все поперечное сечение, а при больших числах Пекле они сосредоточены в тонком пристеночном слое.

- Впервые установлены закономерности влияния диффузии и термофореза наночастиц на вынужденную конвекцию наножидкости в трубе с заданным потоком тепла на стенке. Исследовалась наножидкость вода — оксид алюминия. Предложено выражение для коэффициента, определяющего скорость наночастиц под действием термофореза. Установлено, что термофорез приводит к уменьшению концентрации наночастиц в пристеночном слое. В результате вблизи стенки наблюдается снижение вязкости и соответственное увеличение скорости течения. Это приводит к росту коэффициента теплоотдачи. Построены зависимости локального и среднего коэффициентов теплоотдачи от теплового числа Пекле и интенсивности термофореза.
- Рассмотрена задача об устойчивости стационарного термокапиллярного течения в бесконечном жидким мосте (цилиндре). Результаты решения этой задачи, полученные ранее и считающиеся классическими, существенно пересмотрены. Найдена новая мода неустойчивости, которая является наиболее опасной в области больших чисел Прандтля. Показано, что новые результаты лучше согласуются с экспериментом на качественном и количественном уровне.
- Впервые получено прямое экспериментальное подтверждение существования термовибрационных течений в условиях низкой гравитации параболического полета. С помощью цифровой оптической интерферометрии наблюдалась эволюция поля температур в кубической ячейке, подогреваемой сверху и совершающей поступательные вибрации с высокой частотой

и малой амплитудой. Прямое численное моделирование течений в трехмерной постановке и расчеты на основе осредненных двумерных уравнений показали хорошее согласие с экспериментом. Обнаружено увеличение переноса тепла под действием осредненных термовибрационных течений. Установлены закономерности влияния остаточных ускорений в параболическом полете на перенос тепла и режимы конвекции в полости. Получены простые оценки, выражающие зависимость осредненной скорости, температуры и давления от управляемых параметров и свойств жидкости.

**Теоретическая и практическая значимость.** Диссертация носит в основном теоретический и в меньшей степени экспериментальный характер. Полученные результаты вносят вклад в теорию явлений переноса и конвективной устойчивости многокомпонентных смесей, в качественную теорию дифференциальных уравнений тепломассообмена и теоретические основы экспериментальных методов измерений коэффициентов диффузии и термодиффузии. Значительная часть результатов носит универсальный характер и справедлива для смесей с произвольным числом компонент.

Общий подход, основанный на использовании безразмерных отношений разделения и применении специальных преобразований для упрощения уравнений, позволяет эффективно исследовать конвекцию и процессы тепломассообмена в многокомпонентных смесях с эффектом Соре в различных конфигурациях. Изучение уравнений движения с помощью методов группового анализа позволило установить их качественные свойства (в том числе обнаружить указанные выше преобразования), а также выяснить групповую природу многих точных решений, используемых в приложениях.

Исследования по устойчивости равновесия в плоском слое многокомпонентной смеси с эффектом Соре имеют как фундаментальное, так и прикладное значение. Линейная теория, построенная в настоящей работе, существенно обобщает и развивает имеющиеся результаты для чистых жидкостей (задача Рэлея–Бенара) и бинарных смесей. Рассматриваемая конфигурация является основной для ряда экспериментальных методов измерения коэффициентов

диффузии и термодиффузии. Полученные результаты по устойчивости имеют большое значение для развития этих методов и использовались при наземной подготовке космического эксперимента DCMIX.

Теория движения и разделения многокомпонентных смесей в замкнутой термодиффузионной колонне и результаты в области конвективной устойчивости могут быть использованы при проектировании данных аппаратов и проведении экспериментальных измерений коэффициентов термодиффузии. Карты устойчивости смесей дают важную информацию для экспериментаторов, так как устойчивость конвективного движения является необходимым условием корректности измерений.

Обобщение задачи Грэца о теплообмене в трубе с течением Пуазейля на случай многокомпонентной смеси с учетом эффектов Соре и Дюфора может использоваться для моделирования тепломассообмена в трубах. Кроме этого, полученное точное решение можно использовать для тестирования численных методов. Результаты исследования вынужденной конвекции в наножидкостях позволяют глубже понять механизмы переноса тепла и наночастиц, а также их влияние на конвективные течения наножидкостей и теплопередачу. Прикладная ценность результатов связана с тем, что наножидкости являются одним из перспективных теплоносителей для охлаждения и обогрева различных устройств.

Исследование устойчивости термокапиллярного течения в жидком мосте привело к существенному пересмотру классических результатов и позволило обнаружить новую моду неустойчивости. Это позволило добиться лучшего согласия с экспериментом на качественном и количественном уровне.

Эксперименты по наблюдению термовибрационных течений в условиях низкой гравитации впервые позволили экспериментально подтвердить закономерности, известные ранее лишь в теории. Было замечено, что осредненные конвективные течения в невесомости подобны конвективным течениям, возникающим в поле силы тяжести в неоднородно нагретых жидкостях. Результаты данного эксперимента использовались при подготовке космического

эксперимента IVIDIL, посвященного изучению влияния вибрации на процессы диффузии и термодиффузии в бинарных смесях. Полученные результаты также могут быть использованы для управления поведением жидкостей в космосе, создания искусственной гравитации, интенсификации тепломассообмена в условиях невесомости для охлаждения/обогрева различных устройств.

**Методы исследования.** Для качественного исследования математических моделей движения смесей используются методы группового анализа дифференциальных уравнений (алгоритмы вычисления допускаемой группы преобразований и групповой классификации, методы построения оптимальных систем подалгебр и инвариантных решений). Устойчивость равновесных состояний и конвективных течений исследуется методами линейного анализа. Для численного решения спектральных задач используются методы Галеркина и пошагового интегрирования с ортогонализацией. Аналитические результаты получены с помощью методов общей теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. Для расчетов конвективных течений в замкнутых областях используются методы прямого численного моделирования. Часть расчетов проводилась с помощью коммерческого пакета Ansys Fluent 14.5. Для экспериментального исследования термовибрационной конвекции в условиях низкой гравитации используется метод цифровой оптической интерферометрии. Этот метод позволяет наблюдать поле температуры в исследуемой жидкости. Теоретическое исследование вибрационных течений проводится с помощью численного моделирования на основе полных и осредненных уравнений движения.

**Достоверность результатов** диссертационной работы обеспечивается использованием физически обоснованных моделей для описания процессов переноса в чистых жидкостях и смесях, применением апробированных методов исследования, сравнением теоретических предсказаний с экспериментальными данными, сопоставлением численных расчетов с точными решениями в рамках применимости последних, а также сравнением полученных результатов с известными ранее в предельных случаях.

**Положения, выносимые на защиту.** Автор защищает:

- Формализм для описания многокомпонентных смесей с эффектом Соре с помощью безразмерных параметров — отношений разделения компонентов и суммарного отношения разделения.
- Результаты группового анализа уравнений конвекции бинарной и многокомпонентной смесей с эффектом Соре, а также осредненных уравнений вибрационной конвекции бинарной смеси. Классификацию инвариантных решений (оптимальные системы подалгебр).
- Вывод преобразований, позволяющих исключить члены, связанные с перекрестной диффузией и термодиффузией, из уравнений конвекции многокомпонентной смеси. Применение этих преобразований к задачам конвекции.
- Линейную теорию устойчивости равновесия в плоском слое многокомпонентной смеси с эффектом Соре. Принцип монотонности возмущений, аналитические и численные расчеты характеристик устойчивости в широкой области параметров.
- Теорию разделения многокомпонентных смесей в замкнутой термодиффузационной колонне. Критерий для определения вклада вертикальной диффузии в разделение смесей.
- Линейную теорию устойчивости стационарного течения в колонне. Аналог принципа монотонности возмущений, аналитические и численные расчеты характеристик устойчивости.
- Обобщение решения задачи Грэца о теплообмене в круглой цилиндрической трубе с течением Пуазейля на случай многокомпонентной смеси с учетом эффектов Соре и Дюфора.
- Результаты исследования влияния диффузии и термофореза наночастиц на вынужденную конвекцию и теплообмен наножидкости вода — оксид алюминия в трубе с заданным потоком тепла на стенке.
- Расчет характеристик устойчивости термокапиллярного течения в бесконечном жидкоком мосте. Обнаружение новой моды неустойчивости, которая

является наиболее опасной при больших числах Прандтля.

- Результаты экспериментального и численного исследования термовибрационной конвекции в кубической ячейке в условиях низкой гравитации параболического полета.

**Апробация работы.** По теме диссертации опубликовано 62 печатных работы, из них 21 статья в изданиях из списка ВАК [64–68, 70–85], монография "Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость" [86], 10 статей в трудах конференций [87–96] и 31 публикация в тезисах конференций. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях, семинарах и совещаниях:

- Конференция молодых ученых Института вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск, 2003–2005, 2009–2013)
- Конференция молодых ученых Красноярского научного центра (Красноярск, 2004, 2010, 2012)
- Всероссийская конференция по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 2003, 2010)
- 35-ой Региональная молодежная конференция "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 2004)
- XX Всероссийская школа–семинар "Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа" (Абрау–Дюрсо, 2004)
- Всероссийская конференция "Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение" (Новосибирск, 2004, 2009)
- Международная конференция "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" (Новосибирск, 2005, 2010)
- Всероссийская конференция "Аналитические методы в газовой динамике" (Санкт–Петербург, 2006)
- Всероссийская конференция "Успехи механики сплошных сред" (Владивосток, 2009)

- Международная конференция "Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент, практика" (Новосибирск, 2011)
- IV Всероссийская конференция "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент, приложения" (Бийск, 2011)
- XX Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011)
- XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 2013)
- 10th International Conference on Modern Group Analysis (MOGRAN) (Larnaca, Cyprus, 2004)
- International Meeting on Thermal Diffusion (San–Sebastian, Spain, 2006, Bonn, Germany, 2008, Toulouse, France, 2010, Brussels, Belgium, 2012)
- IX Joint European Thermodynamic Conference (Saint–Etienne, France, 2007)
- International congress "Experiments in Space and Beyond" (Brussels, Belgium, 2007)
- 7th International Conference "Symmetry in Non–linear Mathematical Physics" (Kiev, Ukraine, 2007)
- International Symposium "Two–phase Flows for Ground and Space Applications" (Brussels, Belgium, 2007, 2008, Novosibirsk, Russia, 2009)
- European Low Gravity Research Association (ELGRA) Biennial Symposium and General Assembly (Florence, Italy, 2007, Bonn, Germany, 2009, Antwerpen, Belgium, 2011)
- European Space Agency Topical Team Meetings (Bordeaux, France, 2007, Noordwijk, The Netherlands, 2009, 2010)
- Scientific Meeting in Canadian Space Agency (Montreal, Canada, 2008)
- 37th COSPAR Scientific Assembly (Montreal, Canada, 2008)
- Annual Meeting of American Physical Society, Division of Fluid Dynamics (Minneapolis, USA, 2009, Baltimore, USA, 2011)
- Семинар Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН под руководством академика РАН Л.В. Овсянникова (Новосибирск, 2005)

- Семинар Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН под руководством член–корреспондента РАН В.В. Пухначева (Новосибирск, 2013)
- Семинар Физико–технологического института Уральского федерального университета под руководством профессора В.Д. Селезнева (Екатеринбург, 2013)
- Семинар Института механики сплошных сред УрО РАН под руководством академика РАН В.П. Матвеенко (Пермь, 2013)
- Пермский городской гидродинамический семинар ПГНИУ под руководством профессора Т.П. Любимовой (Пермь, 2013)
- Семинар Института вычислительного моделирования СО РАН "Математическое моделирование в механике" под руководством профессора В.К. Андреева (Красноярск, 2002–2012)

Исследования по теме диссертационной работы выполнялись при поддержке следующих грантов и научных проектов:

- Гранты Российского фонда фундаментальных исследований № 05–01–00836–а, 08–01–00762–а, 11–01–00283–а, 12–01–31069, 13-01-07002 (2005–2013)
- Интеграционные проекты СО РАН № 2.15, 65, 116 (2006–2011)
- Проект фундаментальных исследований СО РАН № 38 (2012–2013)
- Стипендия Министерства науки, техники и культуры Бельгии (2006)
- Стипендия ИНТАС для молодых ученых № 06–1000014–6257 (2007–2008)
- Грант Президента РФ для молодых кандидатов наук МК–299.2009.1 (2009–2010)
- Федеральная целевая программа "Научные и научно–педагогические кадры инновационной России", соглашения 8756 и 14.A18.21.0344 (2012–2013)
- Грант Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно–технической деятельности, соглашение 02/13 (2013)
- Эксперимент TEVICON в параболическом полете (Европейское космическое агентство, программа PRODEX, 2007–2008)

- Космические эксперименты IVIDIL, JEREMI, DCMIX (Европейское космическое агентство, программа PRODEX, 2006–2013)
- Космический эксперимент ДСМИКС (Роскосмос, 2012 – 2013)

**Личный вклад автора.** Работы [64, 66–69, 71, 83–91] выполнены без соавторов. В работе [65] автору принадлежит решение задачи групповой классификации уравнений конвекции бинарной смеси с учетом термодиффузии. В работах [70, 74–76, 92, 93] автору принадлежат постановка задачи, все теоретические построения, аналитические выкладки и численные расчеты. Обсуждение и интерпретация некоторых результатов проводились совместно с соавтором. В работах по теоретическому и экспериментальному исследованию термовибрационной конвекции [72, 73, 78, 79, 94] автору принадлежат выбор параметров и сценария эксперимента, участие в проведении экспериментов в параболических полетах, обработка части экспериментальных данных, сравнительный анализ результатов эксперимента и численного моделирования, исследование применимости приближения Буссинеска и написание текстов статей (за исключением [78, 94]). В работе [77] автору принадлежит обзор собственных результатов. В работе [80] автору принадлежит вся теоретическая часть за исключением численных расчетов, которые были выполнены соавтором. В работе [81] автор участвовал в планировании эксперимента на Международной космической станции. В работах [82, 95] автору принадлежит решение задачи групповой классификации уравнений вибрационной конвекции бинарной смеси, а также постановка задачи о влиянии вибрации на разделение смеси в термодиффузионной колонне и обсуждение полученных результатов. В работах [96, 97] автору принадлежат постановка задачи, аналитические выкладки и интерпретация результатов. Численные расчеты были выполнены совместно с соавтором.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность своему научному консультанту Андрееву В.К. за постоянное внимание к работе и полезные замечания. Автор благодарит Шевцову В.М. за плодотворное сотрудничество и обсуждение полученных результатов во время стажировки в Свободном уни-

верситете Брюсселя. Кроме этого, автор благодарен коллегам и соавторам Мялдину А.З., Мельникову Д.В., Гапоненко Ю.А., Степановой И.В., Минакову А.В., в сотрудничестве с которыми была получена часть результатов данной работы.

**Структура диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, восьми глав, заключения и списка литературы, включающего 327 наименований. Общий объем диссертации 390 страниц, включая 82 рисунка и 25 таблиц.

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования и дана общая характеристика работы.

**Первая глава** содержит обзор литературы по теме диссертации в следующих направлениях: измерение коэффициентов диффузии и термодиффузии, конвективная устойчивость смесей, вибрационная конвекция, теплообмен в условиях вынужденной конвекции, групповой анализ уравнений конвекции.

**Вторая глава** посвящена теоретическому описанию диффузии и термодиффузии в смесях. В параграфе 2.1 приводится выражение для потока массы в бинарной смеси, определяются коэффициенты диффузии, термодиффузии и Соре. Вводится понятие безразмерного *отношения разделения*, которое характеризует отношение градиентов плотности, вызванных градиентами концентрации и температуры в условиях термодиффузионного разделения. Далее формулируются уравнения конвекции бинарной смеси в приближении Обербека–Буссинеска с учетом эффекта Соре. Приводится описание основных безразмерных параметров. В качестве примера рассматривается бинарная смесь этанол–вода. Приводятся зависимости физических свойств и безразмерных параметров от концентрации этанола. Параграф 2.2 посвящен обобщению известных результатов для бинарных смесей на случай многокомпонентных систем. Определяются потоки массы компонентов, коэффициенты диффузии, термодиффузии и Соре. Основным результатом является обобщение параметра *отношение разделения* на случай многокомпонентной смеси. Для каждого компонента смеси этот параметр определяется как отношение градиентов

плотности, вызванных градиентом концентрации этого компонента и градиентом температуры в условиях термодиффузионного разделения. Введено понятие *суммарного отношения разделения*, которое является суммой отношений разделения компонентов. Показано, что этот параметр не зависит от выбора растворителя. Приводятся уравнения конвекции многокомпонентной смеси и обсуждаются основные безразмерные параметры. Рассмотрен пример тройной смеси углеводородов.

**Третья глава** посвящена исследованию свойств инвариантности уравнений конвекции бинарных и многокомпонентных смесей с учетом термодиффузии с помощью методов группового анализа. В параграфе 3.1 изучаются групповые свойства *трехмерных* уравнений конвекции бинарной смеси. Вычислены группы преобразований и соответствующие алгебры Ли операторов, допускаемые системой в зависимости от значений физических параметров, входящих в уравнения (решена задача групповой классификации). Кроме этого, найдены дискретные симметрии уравнений. Вычислена группа преобразований эквивалентности и найдено преобразование, позволяющее исключить член, связанный с термодиффузией, из уравнения переноса массы. Исследована структура допускаемой алгебры Ли операторов: построена таблица коммутаторов и вычислена группа внутренних автоморфизмов. На основе этих результатов построены оптимальные системы подалгебр (выполнена классификация инвариантных решений). В параграфе 3.2 аналогичным образом изучаются групповые свойства *двумерных* уравнений конвекции бинарной смеси. Построены оптимальные системы подалгебр первого и второго порядков для допускаемой алгебры Ли операторов, которая является бесконечномерной. Параграф 3.3 посвящен исследованию групповых свойств уравнений конвекции для смеси с произвольным числом компонент. Описано преобразование эквивалентности, которое позволяет исключить члены, характеризующие термодиффузию, из уравнений переноса массы компонентов. Найдено новое преобразование, которое позволяет исключить члены, связанные с перекрестной диффузией, из уравнений конвекции многокомпонентной смеси. Это достига-

ется посредством линейной замены вектора концентраций и коэффициентов термодиффузии. Член, характеризующий силу плавучести в уравнении импульса, остается неизменным при данной замене. Установлена применимость этого преобразования к задачам конвекции смесей в областях с проницаемыми и непроницаемыми границами. Показано, что суммарное отношение разделения инвариантно относительно этого преобразования. В параграфе 3.4 исследуются групповые свойства осредненных уравнений вибрационной конвекции бинарной смеси. Вычислены группы преобразований и соответствующие алгебры Ли операторов, допускаемые системой в зависимости от значений физических параметров (решена задача групповой классификации).

**В четвертой главе** исследуется конвективная устойчивость многокомпонентных смесей с эффектом Соре. Параграф 4.1 посвящен изучению устойчивости равновесия в плоском слое многокомпонентной смеси. Рассматриваемая задача является существенным обобщением знаменитой проблемы Рэлея–Бенара об устойчивости равновесия в плоском слое, подогреваемом снизу. В настоящей работе наличие градиента температуры приводит к разделению многокомпонентной смеси под действием эффекта Соре. Слой подогревается снизу или сверху в поле силы тяжести. Выписаны линеаризованные уравнения малых возмущений. Установлен принцип монотонности возмущений для слоя многокомпонентной смеси со свободными/твердыми проницаемыми границами. Найдены критические параметры неустойчивости для смеси с произвольным числом компонент в слое со свободными проницаемыми границами. Для случая твердых непроницаемых границ исследована неустойчивость относительно длинноволновых возмущений. С помощью метода разложения по малому параметру (волновому числу) найдены первое и второе приближения для критического числа Рэлея и критической частоты в смеси с произвольным числом компонент. Это позволило установить области существования длинноволновой неустойчивости в пространстве параметров, а также выделить из них те подобласти, в которых длинноволновые возмущения являются наиболее опасными. Исследование неустойчивости относительно возмущений с

произвольным значением волнового числа проводилось с помощью численных методов. Подробно изучены случаи бинарной и тройной смеси в широкой области параметров и построены соответствующие карты устойчивости. Обнаружено существование длинноволновой колебательной неустойчивости в смесях с тремя и большим числом компонент. Эта неустойчивость имеет место при наличии стабилизирующих и дестабилизирующих градиентов концентрации компонентов с различными диффузионными временами. Выполнено сравнение аналитических и численных результатов для различных типов граничных условий (свободные/твердые, проницаемые/непроницаемые границы). В параграфе 4.2 исследуется устойчивость стационарного конвективного течения многокомпонентной смеси в плоском вертикальном слое, подогреваемом сбоку. Горизонтальный градиент температуры вызывает разделение смеси под действием эффекта Соре. Данное течение можно наблюдать в термодиффузионной колонне на начальном этапе разделения. Основное внимание удалено исследованию длинноволновых возмущений в рамках линейной теории. Для смеси с произвольным числом компонент в пространстве параметров выделены области, в которых течение является устойчивым. Описан физический механизм неустойчивости и предложена простая модель, которая позволяет объяснить зависимость критического числа Грасгофа от безразмерных параметров системы (отношений разделения, чисел Прандтля и Шмидта). Подробно изучены случаи бинарной и тройной смесей и построены соответствующие карты устойчивости.

**Пятая глава** посвящена исследованию процессов переноса в термодиффузионной колонне — экспериментальной установке для разделения смесей и измерения коэффициентов термодиффузии. В параграфе 5.1 найдено точное решение, описывающее стационарное течение и разделение многокомпонентной смеси в плоской замкнутой колонне. Исследованы свойства этого решения. Показано, что зависимость вертикального разделения в колонне от термодиффузионных свойств смеси сводится к зависимости суммарного концентрационного числа Рэлея от суммарного отношения разделения. Анализ

этой зависимости показывает, что стационарное решение может быть единственным, неединственным, а также может не существовать в зависимости от значений суммарного отношения разделения. В последних двух случаях тяжелые компоненты накапливаются в верхней части колонны, что приводит к потенциально неустойчивой стратификации. Исследована зависимость профилей скорости и плотности в колонне от суммарного отношения разделения. Проанализировано влияние зависимости плотности от концентрации в уравнениях движения на измеряемые значения коэффициентов термодиффузии. Исследована диффузия в вертикальном направлении колонны и предложено условие (критерий), при выполнении которого этим эффектом можно пре-небречь. В качестве примера рассмотрено разделение тройной смеси углеводородов в колонне. В параграфе 5.2 проводится исследование устойчивости стационарного течения в колонне для двух типов возмущений (продольных и поперечных волн). Построены карты устойчивости для бинарных и тройных смесей в широкой области параметров. Проведен анализ физических механизмов неустойчивости, исследованы типичные структуры возмущений. Показано, что в колонне имеет место монотонная неустойчивость, связанная с образованием вихрей на границе встречных потоков, а также колебательная неустойчивость, обусловленная температурными и концентрационными волнами в условиях вертикальной стратификации по концентрации. Неустойчивость в поперечном направлении колонны связана с дестабилизирующим вертикальным градиентом плотности в смесях с аномальным эффектом Соре (в этом случае тяжелые компоненты концентрируются в верхней части колонны). Для поперечных волн доказан аналог принципа монотонности возмущений, а также ряд теорем, характеризующих свойства устойчивости системы для смеси с произвольным числом компонент. Параграф 5.3 посвящен изучению влияния высокочастотных вибраций на разделение бинарной смеси в колонне. Построено точное решение осредненных уравнений движения. Показано, что наличие вибрации приводит к уменьшению вертикального разделения смеси в колонне, а также к неединственности стационарного решения для смесей с

нормальным эффектом Соре.

**В шестой главе** изучаются процессы тепломассообмена в смесях в условиях вынужденной конвекции. В параграфе 6.1 проведено обобщение задачи Греца о теплообмене в круглой цилиндрической трубе с течением Пуазейля на случай многокомпонентной смеси с учетом эффектов Соре и Дюфора. На конечном отрезке трубы задан постоянный тепловой поток на стенке, в остальной части трубы является теплоизолированной. С помощью линейных преобразований переменных уравнения и граничные условия для температуры и концентрации каждого компонента сведены к задаче, которая полностью совпадает с задачей Греца для однокомпонентной среды. Отдельно изучен случай, когда указанное выше преобразование невозможно. При наличии только эффекта Соре этот случай соответствует равенству теплового и концентрационного чисел Пекле для выбранного компонента смеси. Показано, что при малых числах Пекле неоднородности концентрации, вызванные эффектом Соре, охватывают все поперечное сечение, а при больших числах Пекле они сосредоточены в тонком пристеночном слое. Параграф 6.2 посвящен исследованию влияния диффузии и термофореза наночастиц на вынужденную конвекцию наножидкости вода — оксид алюминия в трубе с заданным потоком тепла на стенке. Учитывается зависимость физических свойств наножидкости от температуры и объемной концентрации наночастиц. На основе анализа теоретических и экспериментальных результатов предложено выражение для коэффициента, характеризующего скорость наночастиц под действием термофореза. Выполнено численное моделирование вынужденной конвекции наножидкости в трубе в осесимметричной постановке. Установлено, что термофорез приводит к снижению концентрации наночастиц вблизи стенки трубы. В результате вязкость и теплопроводность наножидкости в этой области уменьшаются. Скорость движения вблизи стенки при этом возрастает, а вблизи оси трубы — уменьшается. Это приводит к снижению необходимого перепада давления в трубе и увеличению коэффициента теплоотдачи. Показано, что с увеличением теплового числа Пекле и интенсивности термофореза локальный и средний ко-

эффективности теплоотдачи возрастают. При достаточно интенсивном термофорезе в области малых чисел Пекле наблюдается уменьшение среднего коэффициента теплоотдачи с увеличением числа Пекле. Установлено, что термофорез приводит к росту числа Нуссельта с увеличением концентрации наночастиц, в то время как в отсутствии термофореза число Нуссельта от концентрации наночастиц не зависит. Зависимость коэффициента теплоотдачи от мощности, требуемой для прокачивания теплоносителя через канал, показывает, что наножидкость эффективнее базовой жидкости только при малых мощностях.

**В седьмой главе** рассматривается задача об устойчивости стационарного термокапиллярного течения в бесконечном жидком мосте (цилиндре). Модель жидкого моста используется для изучения процессов в зоне расплава при росте кристаллов методом зонной плавки. Стационарное течение в жидком мосте возникает под действием сил поверхностного натяжения, вызванных наличием градиента температуры на свободной границе. С ростом градиента температуры это течение становится неустойчивым. Развитие неустойчивости связано с появлением пары спиральных гидротепловых волн. Результаты решения задачи об устойчивости, полученные ранее и считающиеся классическими, существенно пересмотрены. Установлено, что помимо гидротепловой волны, распространяющейся в направлении стационарного течения на поверхности, существует еще одна гидротепловая волна, которая распространяется в противоположном направлении. Последняя является наиболее опасной в области больших чисел Прандтля и существенно понижает границу устойчивости. Показано, что новые результаты лучше согласуются с экспериментом на качественном и количественном уровне.

**Восьмая глава** посвящена экспериментальному и численному исследованию термовибрационной конвекции в условиях низкой гравитации. Эксперименты проводились в параболическом полете. В параграфе 8.1 приведена схема эксперимента и описаны теоретические модели, используемые для расчетов. Особое внимание удалено выбору параметров эксперимента. Рабочая жидкость (изопропанол) помещалась в кубическую ячейку с разностью темпе-

ратур между верхней и нижней стенками. Ячейка совершила поступательные вибрации с высокой частотой и малой амплитудой. Эволюция поля температур в жидкости под действием термовибрационной конвекции исследовалась экспериментально методом цифровой оптической интерферометрии. Структура осредненного поля температур, наблюдавшаяся экспериментально, подтвердила результаты предыдущих численных исследований. Обнаружено значительное увеличение переноса тепла в полости под действием осредненных термовибрационных течений. Прямое численное моделирование течений в трехмерной постановке и численный расчет на основе осредненных двумерных уравнений движения показали хорошее согласие с результатами эксперимента. Исследовано влияние остаточных ускорений в параболическом полете на перенос тепла и режимы конвекции в полости. Проведено сравнение результатов с данными эксперимента. Показано, что конвективные течения, возникающие в поле силы тяжести в неоднородно нагретых жидкостях, могут быть воспроизведены в невесомости с помощью вибрации. Параграф 8.2 посвящен качественному анализу осредненных уравнений термовибрационной конвекции. Получены простые соотношения (оценки), выражающие зависимости осредненной скорости, температуры и давления от управляющих параметров и физических свойств жидкости.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы. Приводится **список литературы**.

# Глава 1

## Обзор литературы

### 1.1 Измерение коэффициентов диффузии и термодиффузии

Описание и предсказание процессов переноса тепла и массы в смесях требует знания их теплофизических свойств. Последние могут зависеть как от температуры, так и от состава смеси. Если в рассматриваемом процессе существенен перенос массы под действием градиента температуры (эффект Соре), то для определения его направления и интенсивности необходимо знать коэффициенты диффузии и термодиффузии, см. (0.1), (0.2). В данном параграфе дается обзор методов измерения этих коэффициентов и экспериментальных результатов. Основное внимание уделено жидким смесям.

Для измерения коэффициентов диффузии в смесях в настоящее время используются различные подходы. В методе *диафрагменной ячейки* [98] два образца бинарной смеси с различными концентрациями компонентов помещаются в два резервуара, разделенных пористой мембраной. Диффузия через мембрану приводит к изменению состава смеси в резервуарах. Измерение концентраций через определенное время после начала эксперимента позволяет определить коэффициент диффузии. Метод *голографической интерферометрии* [99] основан на зависимости показателя преломления лазерного луча от концентрации смеси. Образцы исследуемой смеси с различным составом приводятся в контакт в диффузационной ячейке. Граница между ними постепенно размывается благодаря диффузии. Градиент концентрации приводит к неоднородному распределению показателя преломления пучка лазерных лу-

чей, проходящих через ячейку. Этот пучок интерферирует с невозмущенным пучком, проходящим мимо ячейки. Анализ интерференционной картины позволяют определить зависимость профиля концентрации от времени и вычислить коэффициент диффузии. В методе *тэйлоровской диффузии* [100] смесь с заданным составом движется по длинной тонкой трубке в ламинарном режиме. В некоторый момент в трубку вводится небольшое количество смеси со слегка измененной концентрацией. Под влиянием параболического профиля скорости плоский участок с измененным составом начинает искажаться, однако процесс радиальной диффузии приводит к выравниванию концентрации. На выходе из трубы продольное распределение концентрации на участке приобретает вид гауссовой кривой, по форме которой определяется значение коэффициента диффузии. Метод *динамического рассеяния света* [101] основан на том, что броуновское движение молекул вызывает микроскопические флуктуации их локальной концентрации, которые приводят к изменению интенсивности рассеяния лазерного луча. В методе рассчитывается автокорреляционная функция, основанная на сравнении интенсивности рассеянного света в начальный и последующие моменты времени. Экспоненциальное затухание этой функции со временем связано с подвижностью молекул и позволяет определить коэффициент диффузии. В *капиллярном методе* [102] тонкие трубы заполняются смесью с заданным составом и помещаются в емкость большого объема со слегка измененным составом смеси. Сравнение экспериментальных значений концентрации смеси в трубках в различные моменты времени с точным решением уравнения диффузии позволяет вычислить коэффициент диффузии.

Описанные выше методы хорошо апробированы для бинарных смесей. Голографическая интерферометрия, тэйлоровская диффузия и динамическое рассеяние света активно используются для измерения коэффициентов диффузии в тройных смесях [99, 103, 104]. В то же время, объем имеющихся экспериментальных данных для тройных жидких смесей остается крайне ограниченным (особенно это касается неидеальных смесей).

Экспериментальные методы для измерения коэффициентов термодиффузии можно разделить на две большие группы. К первой группе относятся методы, в которых отсутствие конвекции гарантирует чисто диффузионный тепломассообмен и является необходимым условием корректности измерений. В качестве рабочей полости в таких методах часто используется плоский горизонтальный слой, в который помещается однородная смесь с заданной концентрацией. В слое создается вертикальный градиент температуры путем поддержания различных постоянных температур на горизонтальных границах. Как правило, используется подогрев сверху с целью избежать возникновения конвекции. Градиент температуры приводит к возникновению градиента концентрации благодаря эффекту термодиффузии. Зависимость разности концентраций между областями вблизи нагретой и холодной границ от времени позволяет определить коэффициент диффузии, в то время как коэффициент термодиффузии определяется из отношения градиентов концентрации и температуры в стационарном состоянии, см. (0.2). После достижения этого состояния на границах устанавливается одинаковая температура. В отсутствие градиента температуры происходит выравнивание концентрации за счет диффузии, что позволяет получить дополнительный объем данных для измерения коэффициента диффузии. Существующие методы различаются по способу измерения концентрации смеси в полости. В ячейке Cope [28] производится отбор небольшого количества жидкости вблизи холодной и нагретой границ. Концентрация компонентов бинарной смеси определяется путем измерения плотности. Для тройных смесей требуется измерение еще одной характеристики (например, показателя преломления лазерного луча). При этом необходимо знать зависимость плотности и показателя преломления от состава смеси. В методе *отклонения лазерного луча* [105] используется горизонтальный слой с прозрачными боковыми стенками, через которые проходит лазерный луч. Изменения температуры и концентрации вызывают отклонение лазерного луча от первоначального направления, соответствующего однородной изотермической смеси. Заметим, что в жидких смесях характерное тепловое время

значительно меньше характерного диффузационного времени. Поэтому установление градиента температуры происходит значительно быстрее, чем установление градиента концентрации. Таким образом, отклонения лазерного луча, вызванные изменениями температуры и концентрации, разделены во времени. Теоретические основы данного метода были обобщены на случай многокомпонентных смесей в [106], а экспериментальное измерение коэффициентов переноса в тройных смесях жидких углеводородов было впервые проведено в [107]. Заметим, что для тройных смесей необходимо использование двух лазерных лучей с различными длинами волн. В методе *цифровой оптической интерферометрии* [108] неоднородности температуры и концентрации приводят к пространственному распределению показателя преломления пучка лазерных лучей, проходящих через полость со смесью. Этот пучок лучей интерфеcирует с невозмущенным пучком, проходящим мимо полости. Полученные интерференционные картины подвергаются цифровой обработке для восстановления исходных полей температуры и концентрации. Одной из первых работ, посвященных измерению коэффициентов диффузии и термодиффузии с помощью интерферометрии, является работа [109] (изучались водные растворы хлорида калия и сульфата натрия).

Кратко остановимся на методах, в которых лазерный луч используется для создания градиента температуры. Такой луч называют *возбуждающим* в отличие от *пробного* луча, который считывает информацию о распределении температуры и концентрации. В методе *тепловой линзы* [110] к смеси добавляется небольшое количество инертного вещества, поглощающего свет с выделением тепла. В силу зависимости показателя преломления от температуры и концентрации смесь ведет себя подобно оптической линзе, через которую проходит пробный пучок лазерных лучей. Анализ формы этого пучка в зависимости от времени позволяет определить коэффициенты переноса. В настоящее время активно используется метод *вынужденного термодиффузационного рассеяния Рэлея* [5]. Посредством интерференции двух лазерных лучей с одинаковой длиной волны создается оптическая решетка, которая преобра-

зуется в тепловую решетку с помощью инертного красителя, поглощающего свет с выделением тепла. Периодическое поле температуры приводит к возникновению периодического поля концентрации благодаря эффекту Соре. Неоднородности температуры и концентрации вызывают периодическое изменение показателя преломления, которое считывается третьим лазерным лучом посредством дифракции Брэгга. Заметим, что применение данного метода к тройным смесям имеет существенные ограничения: необходимо, чтобы характерные диффузационные времена компонентов были существенно различны, а эффекты перекрестной диффузии пренебрежимо малы [111].

Перейдем ко второй группе методов, в которых используется конвекция, возникающая из-за неоднородностей температуры и концентрации в поле силы тяжести. Для измерения коэффициента термодиффузии в бинарных смесях с аномальным эффектом Соре используется установка, изначально предназначенная для наблюдения конвекции *Рэлея–Бенара*, т.е. плоский слой, горизонтальные границы которого поддерживаются при различных постоянных температурах [31]. При подогреве снизу и аномальном эффекте Соре концентрация легкого компонента возрастает у холодной границы (сверху). Дестабилизирующее влияние градиента температуры и стабилизирующее влияние градиента концентрации приводят к возникновению колебательной неустойчивости механического равновесия. Критическая разность температур при этом возрастает по сравнению со случаем чистой жидкости. Измерение этой разности и частоты колебаний позволяют определить отношение коэффициента термодиффузии к коэффициенту диффузии. Расчет основан на формулах для критических параметров неустойчивости, полученных с помощью линейного анализа. При этом необходимо знать теплофизические свойства смеси — плотность, вязкость, теплопроводность, коэффициенты теплового и концентрационного расширения. В работе [112] сделана попытка модифицировать данный метод для измерения коэффициентов переноса в смесях с нормальным эффектом Соре путем измерения критической разности температур в вертикальном слое, подогреваемом снизу.

Одним из наиболее распространенных методов измерения коэффициентов термодиффузии является *термодиффузионная колонна* [17]. Колонна представляет собой длинный вертикальный слой, который заполняется рабочей смесью. В плоской колонне боковые стенки выполнены в виде пластин, а в цилиндрической — в виде концентрических цилиндром. В процессе работы колонна является замкнутой с обоих концов (сверху и снизу). Постоянная разность температур между боковыми стенками вызывает термодиффузионное разделение смеси в горизонтальном направлении и конвективный поток в вертикальном направлении. Компоненты, концентрирующиеся у нагретой и холодной границ, перемещаются в верхнюю и нижнюю части колонны соответственно. В результате формируется вертикальный градиент концентрации. После достижения стационарного состояния этот градиент измеряется путем отбора проб на различных уровнях вдоль вертикального направления колонны. Сопоставление измеренного значения с теоретическим выражением, полученным из точного решения уравнений движения смеси, позволяет определить коэффициент термодиффузии. Для промышленного разделения смесей используются колонны с отбором: смесь вводится в промежуточное сечение колонны, а на верхних и нижних концах производится отбор соответствующих фракций.

Термодиффузионная колонна была изобретена Клузиусом и Диккелем в 1938 году для разделения смесей различных газов, а также их изотопов [30]. Измерение коэффициента термодиффузии в колонне было впервые осуществлено в [113] для смеси бензол–дейтерированный бензол. Ферри, Джонс и Онзагер [114] разработали теорию колонны для бинарных газовых смесей. Заметим, что в этой теории не учитывалась зависимость плотности от концентрации в уравнениях движения. Влияние этой зависимости на стационарное разделение смеси было впервые исследовано в работах [115, 116] для замкнутой цилиндрической колонны и в работе [117] — для плоской колонны. Расчеты для бинарной смеси бензол — *n*-гептан показали, что учет зависимости силы плавучести от концентрации приводит к снижению вертикального градиента кон-

центрации на 12 %, а поперечной разности концентраций — на 8 % [117]. В то же время, дальнейшие исследования показали, что указанной зависимостью можно пренебречь при расчете стационарного разделения широкого класса бинарных смесей [118–120]. Влияние зависимости коэффициентов диффузии и термодиффузии от температуры и концентрации на стационарное разделение исследовалось в [121]. В работе [122] было показано, что разделение может быть усилено посредством расположения колонны под углом к вертикали. Этот эффект был установлен экспериментально для прямоугольной полости в более ранней работе [123]. Следует отметить монографии [17, 18], где приведена обширная информация по теории термодиффузионных колонн, их конструкции и результатам экспериментальных измерений коэффициента термодиффузии в бинарных смесях жидкостей и газов.

Необходимым условием корректного измерения коэффициентов термодиффузии в колонне является устойчивость вертикального конвективного течения. В колонне возможны два принципиально различных механизма неустойчивости. Первый имеет место при превышении критической разности температур между боковыми стенками и связан с разбиением основного конвективного течения на ряд конвективных ячеек, вертикальный размер которых существенно меньше высоты колонны. Второй механизм имеет место для смесей с аномальным эффектом Соре. В этом случае тяжелый компонент бинарной смеси накапливается вблизи нагретой границы, и, соответственно, в верхней части колонны. В поле силы тяжести такая конфигурация приводит к развитию длинноволновой неустойчивости при сколь угодно малой разности температур между стенками. Экспериментальное исследование устойчивости бинарной газовой смеси в колонне было впервые проведено в [124]. Эти результаты были подтверждены более поздней теоретической работой [125] на основе линейного анализа устойчивости. Теоретическое исследование устойчивости жидких бинарных смесей проводилось в [126] для плоской вертикальной колонны и в [127] — для наклонной колонны. Эксперименты в цилиндрической колонне [128, 129] показали, что для бинарных смесей с аномальной термо-

диффузией основное конвективное движение может быть устойчиво в некотором диапазоне параметров (в этом случае градиент концентрации тяжелого компонента направлен противоположно силе тяжести). Этот эффект связан с подавлением длинноволновой неустойчивости в цилиндрическом слое. Заметим, что в плоском слое он не имеет места, поэтому перемещение тяжелого компонента в верхнюю часть колонны всегда приводит к развитию неустойчивости [127, 130].

Обобщение теории термодиффузионной колонны с отбором на случай смеси с произвольным числом компонент было впервые описано в [131]. В дальнейшем теоретические основы измерения коэффициентов термодиффузии были обобщены на случай тройной [132] и многокомпонентной смесей [133]. Экспериментальные измерения коэффициентов термодиффузии тройных смесей жидких углеводородов в колонне впервые выполнены в [134]. Теория нестационарного метода измерения коэффициентов диффузии и термодиффузии многокомпонентных смесей предложена в [135]. Заметим, что нестационарный метод требует измерения вертикальных градиентов концентрации в последовательные моменты времени. В то же время, отбор проб нарушает процесс разделения, поэтому после каждого измерения эксперимент необходимо начинать заново.

Несмотря на то, что теоретические и экспериментальные исследования в области измерения коэффициентов переноса многокомпонентных смесей в колонне в последнее время интенсивно развиваются, многие вопросы до сих пор остаются невыясненными. К таким вопросам относятся влияние вертикальной диффузии и зависимости плотности от концентрации на измеряемые значения коэффициентов термодиффузии, а также существование и единственность решения, описывающего стационарное разделение многокомпонентной смеси. Очень важным является вопрос об устойчивости конвективного течения в колонне в смесях с тремя и большим числом компонент.

## 1.2 Конвективная устойчивость смесей

Началом систематического изучения условий возникновения конвекции в жидкостях можно считать эксперименты Бенара [33, 34], наблюдавшего конвективные ячейки в подогреваемом снизу горизонтальном слое. Теоретическое исследование устойчивости равновесия в слое было впервые выполнено Рэлеем [35] для случая свободных границ. В настоящее время конвективная устойчивость чистых жидкостей изучена достаточно подробно; соответствующие результаты можно найти в классических монографиях [36, 37]. В данном параграфе дается обзор результатов по конвективной устойчивости бинарных и многокомпонентных смесей. Основное внимание уделено результатам для смесей с эффектом термодиффузии.

Одно из первых теоретических исследований конвективной устойчивости равновесия бинарной смеси с учетом эффектов Соре и Дюфора было выполнено в работе [136]. Рассматривался вертикальный слой при наличии градиентов температуры и концентрации в вертикальном направлении, которые заданы независимо или связаны между собой соотношением, вытекающим из непроницаемости верхней и нижней границ для вещества. Впоследствии оказалось, что качественные характеристики устойчивости в последнем случае полностью совпадают со случаем плоского горизонтального слоя, подогреваемого сверху или снизу. Неустойчивость равновесия бинарной смеси с эффектом Соре в таком слое была впервые исследована теоретически и экспериментально в [137]. Методом линейного анализа были найдены критические параметры для свободных проницаемых, а также твердых непроницаемых границ. Установлено, что при нормальной термодиффузии имеет место только монотонная неустойчивость при подогреве снизу, при этом легкий компонент накапливается в нижней части слоя и понижает порог устойчивости. При аномальной термодиффузии и подогреве снизу возможна колебательная неустойчивость. Здесь легкий компонент накапливается в верхней части слоя и повышает порог устойчивости. Возникновение колебаний связано с дестабилизирующим влиянием градиента температуры и стабилизирующим влиянием градиента

концентрации. При подогреве сверху монотонная неустойчивость имеет место лишь при аномальной термодиффузии и связана с увеличением концентрации тяжелого компонента в верхней части слоя. Описанные закономерности были подтверждены в экспериментах со смесью вода–метанол (заметим, что эффект Соре в данной смеси может быть как нормальным, так и аномальным в зависимости от концентрации).

Исследование конвекции в горизонтальном слое бинарной смеси было продолжено в последующих теоретических работах [138, 139]. В работе [140] был проведен линейный анализ устойчивости для случаев постоянной температуры и постоянного потока тепла на нижней границе. Кроме этого, были подробно изучены режимы длинноволновой и коротковолновой неустойчивости при нормальной термодиффузии и подогреве снизу. Экспериментальные исследования неустойчивости в смеси жидких изотопов гелия  $^3\text{He}$ – $^4\text{He}$  [141], а также системе вода–этанол [142] показали хорошее согласие с результатами линейной теории. В работе [143] подробно исследованы нелинейные режимы конвекции в подогреваемом снизу горизонтальном слое с периодическими условиями на боковых границах. Были построены бифуркационные диаграммы в плоскости число Рэлея – число Нуссельта (последнее характеризует безразмерный тепловой поток через границы слоя). Большая часть расчетов проводилась для жидких смесей. Показано, что при нормальной термодиффузии образуются стационарные конвективные ячейки, внутри которых концентрация является практически постоянной, а на границах имеют место резкие градиенты концентрации. В случае аномальной термодиффузии неустойчивость возникает при некотором критическом значении числа Рэлея в виде стоячей волны, амплитуда которой постепенно растет, при этом направление вращения в конвективных ячейках периодически изменяется со временем. Стоячая волна со временем сменяется бегущей волной с меньшей частотой колебаний. Этот режим оказывается устойчивым при числах Рэлея ниже критического. Уменьшение числа Рэлея приводит к увеличению частоты колебаний, однако при достижении некоторого предельного значения бегущая волна сменяет-

ся состоянием механического равновесия. Таким образом, имеет место явление гистерезиса. Увеличение числа Рэлея, напротив, приводит к дальнейшему уменьшению частоты, и при достижении некоторого предельного значения бегущая волна сменяется стационарным режимом конвекции. Для жидких смесей с аномальной термодиффузией в работе [144] подробно исследованы локализованные бегущие волны, возникающие при числах Рэлея, близких к критическому. Описанные выше нелинейные эффекты хорошо согласуются с экспериментальными результатами для смеси вода–этанол [145, 146]. Конвективная неустойчивость бинарной смеси в кубической полости численно исследовалась в работе [147]. Показано, что при подогреве сверху и аномальной термодиффузии тяжелый компонент постепенно накапливается в верхней части полости. В некоторый момент времени в ячейке возникает конвекция, которая приводит к перемешиванию жидкости. Заметим, что конвекция может начаться до достижения полного термодиффузионного разделения смеси. Аналогичная задача для плоского слоя бинарной смеси рассматривалась в [148].

Исследования в области конвективной устойчивости смесей с тремя и большим числом компонент немногочисленны. Устойчивость равновесия в горизонтальном слое тройной смеси теоретически изучалась в [149]. Случай смеси с произвольным числом компонент был исследован в [150]. В указанных работах предполагалось, что градиенты температуры и концентрации компонентов заданы независимо друг от друга, эффекты Соре и перекрестной диффузии не учитывались. Кроме этого, рассматривались свободные, проникаемые для вещества границы. Было показано, что нейтральные кривые имеют весьма сложную структуру (в частности, может существовать несколько областей неустойчивости, ограниченных замкнутыми нейтральными кривыми). Дальнейшие исследования для тройных смесей показали, что учет твердых границ [151] и эффектов перекрестной диффузии [152] оказывает существенное влияние на структуру нейтральных кривых и значения критических чисел Рэлея. В работе [153] был выполнен линейный анализ устойчивости тройной смеси с учетом термодиффузии и проведены эксперименты по определению

критических параметров в смеси вода–изопропанол–этанол. Использование ряда упрощающих предположений (свободные проницаемые границы, отсутствие перекрестной диффузии) затруднило сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными. Экспериментальное и численное исследование конвективной неустойчивости в четырехкомпонентной смеси полиэтиленгликоля (два типа с различной молекулярной массой), хлорида натрия и воды было проведено в [154]. В прямоугольной полости создавалась система из двух слоев, каждый из которых содержал смесь с различными концентрациями компонентов. В зависимости от состава слоев, неустойчивость возникала как на границе раздела, так и внутри слоев. В работе также были измерены девять коэффициентов диффузии в исследуемой смеси (эффект термодиффузии не учитывался).

Экспериментальное исследование конвективной неустойчивости, возникающей при изотермическом смешении тройных газовых смесей в вертикальном канале, проводилось в [156]. Канал соединял две колбы, при этом в верхней колбе содержалась бинарная смесь легкого и тяжелого газа, а в нижней колбе находился однокомпонентный газ с промежуточной плотностью. Концентрации выбирались таким образом, чтобы плотность смеси в верхней колбе была меньше плотности газа в нижней колбе. Тем не менее, при диффузионном смешении газов в канале возникали конвективные потоки. Линейный анализ устойчивости равновесия в предположении постоянных вертикальных градиентов концентрации позволил объяснить экспериментально наблюдаемые границы устойчивости [156]. Возникновение конвекции связано с наличием нескольких характерных диффузионных времен в тройной смеси. В работе [157] исследовалось явление диффузионного "затвора", которое возникает в смесях с существенно различными свойствами взаимной диффузии компонентов. Повышение давления в нижней колбе под действием бароэффекта приводит к возникновению течения смеси из нижней колбы в верхнюю со скоростью, значительно превышающей скорость диффузии одного из компонентов. В результате распределение концентраций в канале становится нелинейным и

возникает инверсия плотности, которая приводит к возникновению неустойчивости.

Если горизонтальный слой смеси ограничен снизу твердой стенкой, а сверху — свободной границей, к гравитационному механизму неустойчивости добавляется еще один механизм, связанный с наличием сил поверхностного натяжения. Возмущения температуры и концентрации на свободной границе приводят к неоднородности поверхностного натяжения, в результате чего возникает движение (конвекция Марангони). Неустойчивость равновесия в слое бинарной смеси со свободной границей при подогреве снизу впервые изучалась теоретически в работе [158]. Учитывался эффект Соре, рассматривались случаи нормальной и пониженной гравитации. Более подробное исследование было выполнено в [159] для различных режимов подогрева при наличии/отсутствии гравитации. Показано, что характеристики устойчивости существенно зависят от отношения концентрационного и теплового чисел Марангони, которое полностью определяется физическими свойствами смеси. Обобщению данной задачи на случай эффектов Соре и Дюфора посвящена работа [160]. Исследовались случаи, когда градиенты температуры и концентрации заданы независимо или связаны соотношением, вытекающим из равенства нулю потока массы на границах слоя. Влияние эффекта Соре на устойчивость равновесия в плоском слое при наличии поверхностно-активного вещества на свободной границе рассматривалось в [161]. В работе [162] впервые изучалась устойчивость равновесия в системе из двух горизонтальных слоев, образованной двумя фазами одной и той же бинарной смеси (расплав алюминий–индий) при наличии вертикального градиента температуры. Учитывалась возможность фазового перехода на границе раздела. Так как равновесные значения концентраций в слоях зависят от температуры, неоднородности последней на границе раздела приводили к возникновению неоднородностей концентрации (при этом эффект Соре не учитывался). Помимо гравитационной и термокапиллярной неустойчивости, в системе была обнаружена колебательная неустойчивость, связанная с наличием фазового перехода.

Конвекция Марангони в двухслойной системе несмешивающихся бинарных смесей с химической реакцией теоретически изучалась в [163]. Верхний слой состоял из слабого раствора кислоты в органическом растворителе, а нижний представлял собой основание, растворенное в воде. Диффузия кислоты через границу раздела и ее взаимодействие с основанием вызывали реакцию нейтрализации, в результате которой в нижнем слое происходило образование соли и воды с выделением тепла. В работе исследовалась устойчивость нестационарного решения, описывающего процессы реакции и диффузии в условиях механического равновесия. Рассмотрены случаи, когда механизмы тепловой и концентрационной неустойчивости Марангони действуют по отдельности или совместно. Показано, что неустойчивость существенно зависит от начального соотношения концентраций кислоты и основания в слоях. В работе [164] численно изучались неустойчивости, возникающие в описанной выше системе под действием силы тяжести (эффект Марангони при этом не учитывался). Построена карта режимов в пространстве параметров задачи, исследованы случаи слабого и сильного влияния химической реакции на развитие неустойчивости в системе. Проведено сравнение с результатами экспериментов [165].

В работах [166, 167] теоретически и экспериментально изучалась конвекция бинарной смеси в вертикальных связанных каналах (конвективной петле) в условиях подогрева снизу и охлаждения сверху. Показано, что эффект термодиффузии оказывает существенное влияние на характер конвективных течений, возникающих при потере устойчивости механического равновесия. В частности, при положительной термодиффузии порог устойчивости равновесия понижается по сравнению со случаем чистой жидкости. При небольших надкритичностях наблюдается медленное стационарное течение. Выход на этот режим происходит в течение очень длительного времени. При увеличении надкритичности в некотором интервале чисел Рэлея наблюдаются "перебросовые" колебания (направление циркуляции в петле периодически меняется со временем). Заметим, что в канале с восходящим течением температура

вблизи стенок меньше, чем в центре, а в канале с нисходящим течением — наоборот. В результате в последнем накапливается тяжелый компонент в середине потока (термодиффузия положительна) и конвективно переносится в канал с восходящим течением. Здесь тяжелый компонент перемещается к стенкам канала благодаря термодиффузии. Так как скорость у стенок существенно меньше, чем в центре канала, то происходит накопление тяжелого компонента в канале с восходящим течением. В результате возникает торможение потока и смена направления циркуляции на противоположное. С ростом надкритичности скорость движения возрастает, градиенты концентрации слаживаются, а период перебросовых колебаний растет. При превышении числом Рэлея некоторого предельного значения в каналах устанавливается стационарное течение.

Остановимся на нескольких работах, посвященных исследованию устойчивости конвективных течений. В [168] изучалась устойчивость конвекции бинарной смеси в вертикальном слое, боковые стенки которого поддерживались при различных постоянных температурах. В результате возникало конвективное течение из двух встречных потоков (восходящего у нагретой стенки и нисходящего у холодной). В слое был задан вертикальный градиент концентрации легкого компонента, создающий потенциально устойчивую стратификацию. Эффект термодиффузии не учитывался. Установлено, что при малых значениях концентрационного числа Рэлея, характеризующего заданный градиент концентрации, неустойчивость связана с образованием неподвижных вихрей на границе встречных потоков (гидродинамическая мода). С увеличением числа Рэлея граница устойчивости резко понижается. Возникающая неустойчивость обусловлена различием времен релаксации температуры и концентрации, которое приводит к возникновению подъемной силы при горизонтальном смещении элемента жидкости (термоконцентрационная мода). При дальнейшем увеличении числа Рэлея граница устойчивости повышается за счет стабилизирующего влияния вертикального градиента концентрации. Критические числа Грасгофа, полученные в расчетах, достаточно хорошо согласуются с

экспериментальными данными [169]. Устойчивость конвекции в слое со стабилизирующим градиентом температуры и дестабилизирующим градиентом концентрации в вертикальном направлении изучалась в [170]. Подробный обзор работ по конвективным течениям в стратифицированных средах можно найти в [42].

Влияние эффекта термодиффузии на устойчивость конвективного течения бинарной смеси в вертикальном слое исследовалось в работе [171]. Эффект термодиффузии приводил к возникновению горизонтального градиента концентрации, при этом вертикальный градиент концентрации отсутствовал. Было показано, что при слабом эффекте термодиффузии имеет место монотонная неустойчивость, связанная с образованием вихрей на границе встречных потоков. При нормальной (аномальной) термодиффузии наблюдается понижение (повышение) порога устойчивости в связи с увеличением (уменьшением) скорости конвективного движения. Усиление разделения смеси при нормальной термодиффузии приводит к понижению границы устойчивости за счет возникновения колебательных возмущений. При аномальной термодиффузии вклад градиента температуры в изменение плотности частично или полностью компенсируется вкладом градиента концентрации. Здесь имеет место длинноволновая термоконцентрационная неустойчивость, при этом граница устойчивости резко понижается. Рассматриваемое стационарное течение интересно тем, что оно возникает в термодиффузионной колонне на начальном этапе разделения [31]. Обзор работ по исследованию устойчивости конвекции в колонне был дан в параграфе 1.1.

Проведенный обзор литературы показывает, что устойчивость конвективных течений и состояний равновесия в бинарных смесях изучены достаточно подробно. Большое количество работ посвящено исследованию нелинейных режимов конвекции, возникающих за порогом неустойчивости. В то же время, конвективная устойчивость многокомпонентных смесей с эффектом Соре остается слабо изученным направлением. Исследования в данной области имеют как фундаментальную, так и прикладную значимость в связи с развитием

методов разделения смесей и измерения коэффициентов переноса, а также необходимостью более глубокого понимания, описания и предсказания процессов тепломассообмена в природе и промышленном производстве [11–19, 42].

### 1.3 Вибрационная конвекция

Рассмотрим полость, заполненную жидкостью с постоянной плотностью. Если полость совершает поступательные колебания с заданной частотой и амплитудой, жидкость движется вместе с полостью подобно твердому телу (т.е. относительное движение частиц жидкости отсутствует). При наличии градиента плотности в полости возникает относительное движение, так как более и менее плотные части жидкости приобретают различные ускорения под действием внешней силы. Это движение называется *вибрационной конвекцией* [46]. Градиент плотности может быть вызван градиентом температуры или градиентом концентрации (в смесях). В этих случаях говорят о *термовибрационной* или *концентрационно-вибрационной* конвекции соответственно. Если период колебаний много меньше характерных времен системы (вязкого, теплового, диффузационного), то говорят о вибрациях высокой частоты. В этом случае все величины, характеризующие движение и тепломассообмен, можно разделить на две составляющие: "медленную" осредненную (получается осреднением данной величины по периоду колебаний) и "быструю" пульсационную (представляет собой разность данной величины и ее осреднения).

Метод осреднения был впервые применен к задачам тепловой конвекции в работе [45]. Это позволило получить уравнения для осредненных полей скорости, давления и температуры, не содержащие "быстро" время в явном виде. В этих уравнениях был впервые введен безразмерный критерий, названный впоследствии вибрационным аналогом числа Рэлея. В работе также было исследовано влияние вертикальных высокочастотных вибраций на устойчивость квазиравновесия в плоском горизонтальном слое, подогреваемом снизу в поле силы тяжести. Под квазиравновесием понимается состояние, в котором осредненная составляющая скорости равна нулю. Установлено, что вибрации

приводят к повышению критического числа Рэлея по сравнению с классическим случаем плоского слоя, подогреваемого снизу в отсутствии вибраций. Строгое математическое обоснование метода осреднения для задач конвекции было впервые дано в [172]. Показано, что решение в виде суммы пульсационных и осредненных компонент скорости и температуры стремится к решению полных (неосредненных) уравнений при стремлении частоты колебаний к бесконечности.

Как было отмечено во Введении, особый интерес представляет изучение вибрационных течений в невесомости. Устойчивость квазиравновесия в плоском слое с осью вибрации, расположенной под углом к поперечному градиенту температуры, изучалась в [173]. Показано, что если ось вибрации параллельна градиенту температуры, квазиравновесие устойчиво. При увеличении угла между ними критическое вибрационное число Рэлея уменьшается и достигает минимума в случае продольных вибраций. Более общий случай, когда градиент температуры и ось вибрации расположены под произвольными углами к плоскости слоя, исследован в [174]. Экспериментальное подтверждение термо-вибрационного механизма конвекции было впервые получено в работе [175]. Плоский вертикальный слой, подогреваемый сбоку, совершил продольные горизонтальные колебания с высокой частотой. При небольших вибрационных числах Рэлея в слое имела место гравитационная конвекция (жидкость опускалась у холодной стенки и поднималась у нагретой стенки). При превышении порогового значения, предсказанного ранее для условий невесомости [173], в слое возникали конвективные валы с вертикальными осями. Таким образом, в земных условиях удалось разделить гравитационный и термо-вибрационный механизмы конвекции. В работе [176] экспериментально изучалась конвекция в плоском горизонтальном слое в условиях продольных вибраций при подогреве сверху и снизу. В плоскости числа Рэлея – вибрационное число Рэлея была найдена граница устойчивости квазиравновесия. Показано, что интерполяция полученных результатов на ось, отвечающую нулевому значению числа Рэлея (т.е. отсутствию гравитации), дает критическое значение вибрационного числа

Рэлея, которое хорошо согласуется с теорией [173].

Теоретическое исследование взаимодействия гравитационного и термо-вибрационного механизма конвекции в слое, расположенному под углом к вертикали в поле силы тяжести, было проведено в [177] для различных направлений градиента температуры и оси вибраций (вертикального, горизонтального, продольного и поперечного). В работе [178] изучалась устойчивость квазивновесия в плоском горизонтальном слое бинарной смеси с учетом эффекта Соре. Ось вибрации была направлена в продольном направлении, рассматривались случаи подогрева снизу и сверху в поле силы тяжести и в условиях невесомости. В последнем случае обнаружена длинноволновая неустойчивость для нормального и сильного аномального эффекта Соре. Увеличение вибрационного числа Рэлея приводит к тому, что колебательная и монотонная неустойчивости, наблюдаемые в плоском слое без вибрации при подогреве снизу (см. параграф 1.2), возникают также при подогреве сверху. Построена карта устойчивости в плоскости число Рэлея — вибрационное число Рэлея для смеси этанол (10 %) — вода (90 %).

Влияние высокочастотных вибраций на устойчивость течения в плоском вертикальном слое с границами разной температуры исследовалось в [179]. Установлено, что продольные вибрации оказывают дестабилизирующее влияние на осредненное течение с кубическим профилем. При превышении вибрационным числом Грасгофа некоторого предельного значения, течение становится неустойчивым при любых числах Грасгофа. Что касается поперечных вибраций, то они оказывают стабилизирующее влияние на монотонную и колебательную моды неустойчивости [46]. В работе [180] исследовалось влияние продольных вибраций на устойчивость конвективного течения бинарной смеси в вертикальном слое. Разность температур между боковыми стенками приводила к разделению смеси под действием эффекта термодиффузии. Построены карты устойчивости в плоскости число Грасгофа — вибрационное число Рэлея. Рассмотрены случаи нормальной и аномальной термодиффузии для физических параметров, соответствующих жидким и газовым смесям. В

частности, для нормальной термодиффузии при отсутствии гравитации имеет место длинноволновая монотонная неустойчивость квазиравновесия. Увеличение числа Грасгофа приводит к возникновению конвективного течения и оказывает стабилизирующее влияние на данный тип неустойчивости. В отсутствии вибрации конвективное течение становится неустойчивым при некотором критическом значении числа Грасгофа. Продольные вибрации приводят к снижению порога устойчивости.

Влияние вибрации на адвективные течения в плоском горизонтальном слое с продольным градиентом температуры изучалось в работе [181]. В отсутствии вибрации течение состоит из двух встречных потоков (в верхней части слоя жидкость течет в сторону, противоположную градиенту температуры, а в нижней части — в обратном направлении). Увеличение интенсивности продольных вибраций приводит к уменьшению скорости осредненного адвективного течения. Устойчивость данного течения относительно плоских и спиральных возмущений была исследована в [182]. Установлено, что вибрации приводят к повышению границы устойчивости практически для всех типов возмущений (за исключением плоских тепловых волн). В работе [183] рассмотрена более общая задача о течении в плоском слое с продольным градиентом температуры. Направление силы тяжести и ось вибрации заданы двумерными векторами и могут иметь произвольные направления. Обнаружено, что при выполнении определенных соотношений, связывающих компоненты этих векторов, число Рэлея и вибрационное число Рэлея, в слое существует квазиравновесие. Таким образом, соответствующим выбором направления и интенсивности вибраций можно всегда подавить осредненное течение.

Остановимся на работах, в которых исследуется влияние вибрации с произвольными частотами на конвективную устойчивость. В [184] изучена устойчивость равновесия в плоском слое бинарной смеси с эффектом Соре. Слой находился в поле силы тяжести и осциллировал в поперечном направлении. Для определения границ устойчивости использовалась теория Флоке. Показано, что при умеренных частотах и достаточных амплитудах на карте устой-

чивости имеется большое число областей параметрического возбуждения, где возникает резонансное взаимодействие колебательных мод неустойчивости с внешним вибрационным воздействием. Благодаря этому в зависимости от параметров вибрации возможна как стабилизация, так и дестабилизация равновесия. Исследование нелинейных конвективных режимов, возникающих за порогом неустойчивости в смеси с аномальным эффектом Соре, было проведено в [185]. Обнаруженные конвективные структуры соответствуют синхронному или субгармоническому отклику на внешнее воздействие. Кроме этого, возможен квазипериодический режим, связанный со взаимодействием бегущих волн с внешней вибрацией. Влияние продольных вибраций на устойчивость течения бинарной смеси с эффектом Соре в вертикальном слое с боковым подогревом изучалось в [186]. Методом асимптотических разложений исследовано поведение длинноволновых возмущений. Показано, что длинноволновая мода является наиболее опасной при нормальном и сильном аномальном эффекте Соре. Устойчивость течения жидкости с примесью мелких твердых частиц в вертикальном слое изучалась в работах [187] и [188] без учета и с учетом продольной вибрации соответственно. Показано, что добавка твердой примеси повышает границу устойчивости системы. Кроме этого, с увеличением концентрации твердых частиц критическое волновое число уменьшается при высоких частотах вибрации и увеличивается при низких частотах.

Перейдем к обзору работ, в которых исследуются термовибрационные течения в замкнутых областях. Численное моделирование таких течений в квадратной полости в условиях невесомости было впервые выполнено в [189] на основе осредненных уравнений движения. Между верхней и нижней границей поддерживалась постоянная разность температур, на боковых стенках задавался линейный профиль температуры. Направление вибрации было перпендикулярно градиенту температуры. Построена зависимость числа Нуссельта от вибрационного числа Рэлея. Установлено, что при небольших значениях последнего в полости наблюдается симметричное осредненное течение из четырех вихрей. При превышении вибрационным числом Рэлея некоторого

пределного значения эта структура сменяется структурой из одного диагонального вихря и двух маленьких вихрей в углах полости. Четырехвихревой режим становится метастабильным (он формируется после начала вибрации, существует в течение определенного времени и затем сменяется трехвихревым режимом). Переходные режимы термовибрационной конвекции в квадратной полости с боковыми адиабатическими стенками изучались численно в [190]. Построена зависимость времени установления стационарного осредненного течения от вибрационного числа Рэлея. Обнаружено, что время установления резко возрастает в точках, соответствующих переходу от одного режима к другому. Эта особенность связана с существованием метастабильных режимов. Численное моделирование термовибрационных течений в кубической полости на основе осредненных уравнений было выполнено в [191]. Установлено, что поля скорости и температуры в сечениях, соответствующих постоянным значениям "третьей" координаты, подобны тем, которые были обнаружены ранее в квадратной полости. Исследование течений, возникающих в квадратной полости под действием вибрации произвольной частоты, проводилось в [192]. Построены карты режимов в пространстве параметров безразмерная частота – число Рэлея (последнее было пропорционально приложенной разности температур и амплитуде вибрации). Обнаружены режимы синхронного, субгармонического и непериодического отклика на внешнее воздействие.

Влияние высокочастотных вибраций на устойчивость квазиравновесия в прямоугольной полости с различным соотношением сторон изучалось в [193]. Полость подогревалась снизу в поле силы тяжести, а ось вибрации была параллельна градиенту температуры. Заметим, что если последнее условие не выполняется, то квазиравновесие в замкнутой полости невозможно (в отличие от бесконечного плоского слоя). В то же время, при небольших вибрационных числах Рэлея в достаточно длинном слое интенсивность осредненного движения и его вклад в перенос тепла пренебрежимо малы (например, для случая продольных вибраций). При превышении критического значения эта интенсивность резко возрастает, что может быть интерпретировано как

неустойчивость квазиравновесия. Эта неустойчивость может быть обнаружена экспериментально по резкому увеличению теплового потока через границы слоя [176].

Экспериментальное и численное исследование вибрационной конвекции в подогреваемой снизу ячейке Хеле–Шоу проводилось в работах [194, 195]. Ось вибрации была направлена перпендикулярно градиенту температуры. Изучена зависимость структуры осредненного течения от числа Рэлея и вибрационного числа Рэлея. При малых значениях последних визуальные наблюдения показывали отсутствие осредненных течений. В численном расчете этому состоянию отвечала структура из четырех вихрей очень малой интенсивности. С увеличением числа Рэлея в эксперименте наблюдалась следующая смена режимов: одновихревое течение, двухвихревое течение, пульсационный режим из двух асимметричных вихрей. На основании численных расчетов были построены карты режимов в широком диапазоне управляющих параметров. В численном расчете при увеличении вибрационного числа Рэлея четырехвихревая структура сменяется не одновихревым течением, а структурой из одного диагонального вихря и двух маленьких вихрей в углах полости. Сравнение численных и экспериментальных результатов показало, что они дают различные границы для соответствующих режимов в пространстве параметров. В тоже время, расчеты позволили правильно предсказать форму и последовательность конвективных режимов.

В работе [196] теоретически и экспериментально исследовалась вибрационная тепловая конвекция в поле комбинированных поступательно — вращательных высокочастотных вибраций. Рассматривались течения в прямоугольной полости и в зазоре между коаксиальными цилиндрами. Показано, что комбинированные вибрации приводят к более интенсивному конвективному движению и переносу тепла в сравнении со случаем чисто поступательных или вращательных вибраций. Получено хорошее согласие экспериментальных результатов и численных расчетов, проведенных с использованием осредненных уравнений движения.

Остановимся на работах, в которых исследуется влияние вибрации на тепломассообмен в космических экспериментах. Как было отмечено во Введении, эксперименты по измерению коэффициентов переноса требуют чисто диффузационного тепломассообмена, который может быть достигнут в невесомости. В то же время, вибрации, возникающие на космических платформах за счет работы различных механизмов, могут оказывать существенное влияние на такие эксперименты. В работе [197] численно исследовалось воздействие высокочастотных вибраций и постоянной остаточной гравитации на эксперимент по измерению коэффициента диффузии бинарной смеси. Построена зависимость ошибок измерений, вызванных наличием конвективных течений, от параметров вибрации. Влияние высокочастотных вибраций на термодиффузионное разделение газовой смеси в квадратной полости исследовалось численно в [198]. Разделение жидкой смеси вода–изопропанол в кубической полости в присутствии вибрации высокой и низкой частоты, а также постоянной остаточной гравитации, изучалось в [199]. Направления действия вибрации и гравитации были перпендикулярны градиенту температуры. Определен уровень остаточной гравитации, превышение которого приводит к значительному уменьшению термодиффузионного разделения за счет конвекции. Показано, что низкочастотные вибрации вызывают более интенсивное конвективное перемешивание смеси, чем высокочастотные вибрации той же амплитуды. Указанные исследования проводились в рамках подготовки к космическому эксперименту IVIDIL (Influence of Vibration on Diffusion in Liquids), в котором изучалось влияние вибрации на диффузию и термодиффузию в жидких смесях в условиях невесомости на Международной космической станции [200].

Результаты экспериментов по изучению влияния вибрации и остаточных микроускорений на поведение окколокритических жидкостей в невесомости представлены в работах [201, 202]. Эксперименты проводились с помощью оборудования ALICE на станции МИР. При подходе к критической точке коэффициент теплового расширения и теплоемкость значительно возрастают, в результате чего чувствительность жидкости к вибрационному воздействию

повышается. В экспериментах изучалось распространение тепла в жидкости от точечного источника путем наблюдения интерференционных картин. Нарушение симметрии в распространении тепла интерпретировалось как наличие термовибрационных конвективных течений. Экспериментальные наблюдения были подтверждены численными расчетами. Заметим, что количественные измерения поля температур в экспериментах не проводились. Влияние остаточных микроускорений на конвекцию в неоднородно нагретых цилиндрических полостях на борту станции МИР и космического шаттла (STS-95) изучалось в работах [203] и [204] соответственно. Целью экспериментов было создание датчиков для обнаружения микроускорений путем регистрации вызываемых ими конвективных течений. Осредненные течения, возникающие под действием высокочастотных компонент микроускорений, в данных экспериментах обнаружены не были.

Подводя итог данного обзора, следует сказать, что за несколько последних десятилетий было проведено большое количество теоретических и численных исследований термовибрационных течений. Количество экспериментальных результатов в данной области во много раз меньше. Особенно это касается термовибрационной конвекции в условиях невесомости, где имеются лишь отдельные исследования. Результаты последних зачастую носят лишь качественный характер.

## 1.4 Теплообмен в условиях вынужденной конвекции

За последние двадцать лет произошел качественный скачок в развитии вычислительной техники, систем передачи данных, измерительной аппаратуры, светоизлучающего оборудования. Это стало возможным за счет миниатюризации электронных устройств и значительного повышения их производительности. Уменьшение размеров приводит к существенному росту выделяемых тепловых потоков, что, в свою очередь, стимулирует разработку новых, более эффективных систем охлаждения.

В условиях малых размеров и больших тепловых потоков наиболее пер-

спективным является использование теплообменных систем с жидкостным охлаждением. Такие системы состоят из множества каналов, по которым циркулирует жидкий теплоноситель. Системы с характерным размером каналов 10 мкм – 1 мм обладают значительно большей энергоэффективностью по сравнению с макросистемами, имеющими характерный размер каналов 10 – 100 мм [49]. Величина отводимых тепловых потоков в микротеплообменных устройствах может превышать 1000 Вт/см<sup>2</sup>. Жидкостные теплообменники с их малыми размерами и высокими тепловыми характеристиками позволяют интегрировать охлаждающие системы в устройства микроэлектроники. Системы охлаждения на основе мини- и микроканалов также активно используются в других областях техники (например, в аэрокосмической индустрии, транспорте и энергетике).

В настоящее время используются как однофазные, так и двухфазные теплообменные системы. В последнем случае теплоноситель претерпевает фазовый переход от жидкости к пару и наоборот. Исследование течений жидких пленок при наличии спутного потока газа в миниканалах с локальным нагревом проводилось в работах [205, 206]. Влияние эффектов испарения на гидродинамику и теплообмен в пленочных течениях исследовалось в [207] на основе двумерной модели. В работе [208] была предложена трехмерная модель совместного течения жидкости и газа в микроканале с учетом испарения, вызванного локальным подогревом.

Одновременно с миниатюризацией теплообменных устройств очень быстро развивается направление, связанное с повышением теплопроводности теплоносителя (жидкости) путем добавления в него твердых частиц с высокой теплопроводностью. Многочисленные исследования, однако, показали, что использование частиц микронного размера может привести к снижению теплопередачи за счет подавления турбулентности дисперсной фазой. Кроме этого, могут возникнуть такие нежелательные эффекты, как абразивный износ поверхности канала, отложение частиц на стенке и в застойных зонах, увеличение гидравлического сопротивления [51]. Эти проблемы могут быть решены

за счет перехода к жидкостям с частицами нанометровых размеров (1 – 100 нм), которые получили название *наножидкости* [50]. В качестве наночастиц используются керамические частицы (оксиды алюминия, железа, меди, кремния, титана), металлические частицы (алюминий, железо, медь, серебро) и углеродные нанотрубки. Типичными несущими (базовыми) жидкостями являются вода, этиленгликоль, машинное масло, полимерные растворы. Таким образом, наножидкости являются дисперсными системами с твердой дисперсной фазой и жидкой дисперсной средой и принадлежат к классу коллоидных растворов.

Исследования показали, что наножидкости обладают рядом полезных свойств [209]. Теплопроводность наножидкости может значительно превышать теплопроводность базовой жидкости. Например, в работе [210] было показано, что теплопроводность наножидкости на основе этиленгликоля и наночастиц меди с объемной концентрацией 0.3 % превышает теплопроводность базовой жидкости на 40 %. Жидкости с примесью углеродных нанотрубок имеют теплопроводность в несколько раз выше исходной [211]. В отличие от крупных дисперсных частиц, наночастицы седimentируют значительно медленнее и не подвергают эрозии каналы, по которым движутся. Использование различных методов для предотвращения агломерации наночастиц (регулирование кислотности, добавление поверхностно-активных компонентов, обработка ультразвуком) позволяет добиться стабильности наножидкостей на протяжении длительного времени [51]. Кроме этого, ряд наножидкостей сохраняют ньютоновские свойства и незначительно увеличивают коэффициент гидродинамического трения в каналах при малых концентрациях наночастиц [52].

Значительное количество работ посвящено экспериментальному исследованию теплопроводности наножидкостей. Последняя зависит от объемной концентрации, теплопроводности и диаметра наночастиц, а также от теплопроводности базовой жидкости. Теплопроводность наночастиц и базовой жидкости, в свою очередь, зависит от температуры. Данные о теплопроводности одних и тех же наножидкостей зачастую отличаются у различных авторов [212].

Это связано со сложностью проведения экспериментов: не удается создать монодисперсные наножидкости, трудно исследовать распределение наночастиц по размерам, может нарушаться однородность распределения частиц. С целью получения достоверных данных о теплопроводности ряда наножидкостей (вода — оксид алюминия, оксид кремния, золото) более тридцати научных групп со всего мира провели сравнительные экспериментальные измерения различными методами [213]. Было получено достаточно хорошее согласие результатов. Заметим, что аномально высокие значения теплопроводности наножидкостей, полученные экспериментально, зачастую не укладываются в теоретические модели, разработанные для обычных суспензий (к последним относятся модели Максвелла и Гамильтона–Кроссера) [210, 211]. Понимание механизмов переноса тепла в наножидкостях является одним из фундаментальных вопросов. В настоящее время рассматриваются несколько механизмов: броуновское движение наночастиц (диффузия), образование высокотеплопроводного жидкого слоя на границе раздела жидкость–частица, кластеризация наночастиц, термофорез (перенос наночастиц под действием градиента температуры), баллистический перенос тепловой энергии внутри индивидуальной наночастицы и между наночастицами при их контакте [214]. Учет указанных эффектов приводит к разработке новых моделей теплопроводности наножидкостей [215, 216]. Тем не менее, вопрос о вкладе различных механизмов в эффективную теплопроводность наножидкостей пока остается открытым.

Вязкость наножидкости зависит от объемной концентрации и диаметра наночастиц, а также от температуры. С увеличением концентрации наночастиц вязкость возрастает. На сегодняшний день не существует универсальной корреляции для вязкости в зависимости от указанных выше параметров, способной охватить все экспериментальные данные. Попытка обобщения большого количества экспериментальных данных для вязкости и теплопроводности наножидкости вода — оксид алюминия была предпринята в работе [217]. Для вязкости была предложена корреляция в виде функции от температуры, объемной концентрации и диаметра наночастиц. Отношение теплопроводно-

сти наножидкости к теплопроводности воды описывалось функцией от объемной концентрации, диаметра и теплопроводности наночастиц. В указанной работе также приведен обзор теоретических и экспериментальных корреляций для вязкости и теплопроводности, а также плотности и теплоемкости наножидкостей. Экспериментальные данные, а также результаты моделирования методом молекулярной динамики [218] свидетельствуют о том, что вязкость наножидкости не описывается классическими корреляциями типа формулы Эйнштейна [219] или ее обобщений на случай более высоких концентраций.

Перспектива использования наножидкостей в качестве теплоносителя привела к появлению большого количества работ по исследованию теплообмена в условиях вынужденной конвекции. В большинстве экспериментальных работ изучается вынужденная конвекция наножидкости в трубе с заданным потоком тепла на стенке. Как правило, используются круглые мини- и микроканалы длиной от нескольких сантиметров до нескольких метров. Типичная экспериментальная установка состоит из теплообменного участка в виде круглой цилиндрической трубы, оборудованной нагревателем и термопарами для измерения температуры, насоса, с помощью которого осуществляется движение жидкости, и участка охлаждения, где температура жидкости возвращается к исходному значению [52]. В экспериментах исследуется зависимость коэффициента теплоотдачи и числа Нуссельта от чисел Рейнольдса и Прандтля или их произведения (числа Пекле). Большой объем экспериментальных данных по теплоотдаче в условиях вынужденной конвекции приведен в обзорах [52, 220]. В качестве базовой жидкости использовались вода, трансмиссионная жидкость, синтетическое масло. Применились керамические наночастицы (оксиды алюминия, меди, титана), металлические наночастицы (меди), графит и углеродные нанотрубки. Размер наночастиц варьировался в диапазоне 13–130 нм, объемная концентрация изменялась от 0.05 до 4.4 %. Число Рейнольдса охватывало диапазон от ламинарных до развитых турбулентных течений. Как при ламинарном, так и при турбулентном режиме течений была зафиксирована интенсификация теплообмена. Напри-

мер, для ламинарного течения наножидкости вода — оксид алюминия максимальное увеличение числа Нуссельта по сравнению с базовой жидкостью составило около 40 % при объемной концентрации 3 %. Результаты экспериментальных данных для турбулентных течений свидетельствуют о том, что корреляция Диттуса–Болтера, описывающая зависимость числа Нуссельта от чисел Рейнольдса и Прандтля для обычных жидкостей [221], дает заниженные значения для наножидкостей, если концентрация наночастиц превышает 0.5 %. Увеличение теплоотдачи особенно выражено для наножидкостей на основе углеродных нанотрубок. В работе [222] было зарегистрировано увеличение коэффициента теплоотдачи на 350 % в наножидкости вода — углеродные нанотрубки при объемной концентрации последних 0.5 %. По мнению авторов, такое увеличение теплоотдачи не может быть полностью объяснено повышением теплопроводности жидкости при добавлении наночастиц.

Заметим, что в большинстве работ коэффициенты теплоотдачи базовой жидкости и наножидкости сравниваются при одном и том же значении числа Рейнольдса. В работах [223, 224] было показано, что такое сравнение некорректно с физической точки зрения, так как при фиксированном значении числа Рейнольдса наножидкости соответствует большая скорость, чем базовой жидкости, в силу увеличения вязкости при добавлении наночастиц. С инженерной точки зрения, сравнение должно производиться при одном и том же значении мощности, требуемой для прокачивания теплоносителя через обогреваемый участок.

Для описания движения и теплообмена наножидкостей в настоящее время используются различные подходы. *Модель однородной наножидкости* предполагает, что гидродинамика и теплообмен могут быть описаны уравнениями Навье–Стокса и переноса тепла с физическими параметрами, соответствующими наножидкостям [225]. Однако, такая модель противоречит ряду экспериментальных данных. Выше было отмечено, что использование стандартных корреляций, полученных на основе данной модели, дает заниженные значения числа Нуссельта. В работе [226] была предложена *дисперсионная модель нано-*

*жидкости*, в которой предполагается, что присутствие наночастиц возмущает поля скорости и температуры по сравнению со случаем чистой среды. Эти возмущения моделируются при помощи дисперсионных коэффициентов, которые представляют собой добавки к коэффициенту теплопроводности в уравнении энергии. В работе [53] была предложена *двухкомпонентная модель наножидкости*, которая рассматривает последнюю как бинарную смесь базовой жидкости и наночастиц, концентрация которых является переменной величиной. Показано, что основными механизмами, приводящими к неоднородности концентрации наночастиц, являются броуновская диффузия и термофорез (перемещение частиц под действием градиента температуры), при этом вклад диффузии наночастиц в перенос тепла пренебрежимо мал. Заметим, что термофорез в коллоидных растворах иногда также называют термодиффузией или эффектом Соре по аналогии с молекулярными смесями [5]. В двухкомпонентной модели в дополнение к уравнениям Навье–Стокса и переноса тепла появляется уравнение переноса наночастиц. Предполагается, что коэффициент диффузии описывается формулой Эйнштейна–Стокса. Для коэффициента термодиффузии автор работы [53] предлагает использовать формулу, основанную на выражении для термофоретической скорости в жидкой суспензии. Это выражение было получено путем сопоставления экспериментальных данных для частиц микронного размера в воде и *n*-гексане [227] с формулой, выведенной ранее для взвеси твердых частиц в газе [228] (при этом был скорректирован коэффициент пропорциональности между скоростью частицы и градиентом температуры). В полученной формуле термофоретическая скорость прямо пропорциональна вязкости среды. В то же время, многочисленные теоретические результаты и экспериментальные данные [229, 230], а также результаты моделирования методом молекулярной динамики [231] свидетельствуют о том, что в коллоидных растворах термофоретическая скорость обратно пропорциональна вязкости. Заметим также, что для коллоидных систем отношение коэффициента термодиффузии к коэффициенту диффузии (см. (0.2)) в 10–100 раз выше, чем для молекулярных смесей.

В работах [232, 233] были сделаны попытки построить упрощенные модели, описывающие гидродинамику и теплообмен наножидкости в круглом канале с учетом неоднородной концентрации наночастиц. Предполагалось, что поток наночастиц зависит от градиентов вязкости, скорости сдвига, концентрации и температуры. Однако, полученные профили концентрации оказались не гладкими на оси канала. Эти результаты некорректны как с физической, так и с математической точки зрения. Численное моделирование вынужденной конвекции в круглой трубе на основе двухкомпонентной модели проводилось в [234] для наножидкости вода—оксид алюминия. Наножидкость с заданной температурой и концентрацией наночастиц поступала в трубу, стени которой поддерживались при другой (более высокой) температуре. Было показано, что термофорез приводит к снижению концентрации наночастиц в пограничном слое вблизи стенки канала. Таким образом, наночастицы перемещаются по направлению к центру канала, где температура ниже, чем у стенки. В результате вязкость наножидкости в пограничном слое падает, что, в свою очередь, приводит к увеличению скорости наножидкости вблизи стенки канала и ее уменьшению в центральной части. Расчеты показали, что коэффициент теплоотдачи при этом возрастает. Попытки объяснить результаты экспериментальных данных по вынужденной конвекции наножидкостей на основе аналогичных соображений были предприняты в [235, 236].

Следует отметить, что работа по изучению влияния диффузии и термофореза на поведение наножидкостей только начата. Необходимы дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования для понимания этих процессов.

При изучении теплообмена в условиях вынужденной конвекции возникает задача о нахождении распределения температуры жидкости в трубе с заданной температурой или потоком тепла на стенке. Эта задача называется *задачей Греца* [237, 238]. В классической постановке предполагается, что в трубе имеет место течение Пуазейля с параболическим профилем скорости. Температура жидкости на входе в трубу является заданной. Считается,

что число Пекле, пропорциональное средней скорости жидкости, достаточно большое, поэтому теплопроводностью в осевом направлении трубы можно пренебречь. Однако, для течений при малых числах Пекле теплопроводность в осевом направлении может быть существенна (например, в теплообменниках с жидкими металлами [239]). Задача об определении температуры жидкости в трубе с учетом осевой теплопроводности называется *расширенной задачей Греца*.

В литературе имеется достаточно много работ, посвященных построению точного решения расширенной задачи Греца. В ранних работах [240–243] рассматривалась полубесконечная труба с заданной температурой на входе. Однако, при малых числах Пекле теплопроводность в осевом направлении может повлиять на температуру входящего потока. Этот эффект был учтен в работах [244–248] путем рассмотрения бесконечной трубы со скачкообразным изменением температуры или потока тепла на стенке на входе в обогреваемый участок (конечный или полубесконечный). Начальная температура жидкости задавалась вдали от входа (при  $-\infty$ ). Численное решение задачи для обоих типов граничных условий было впервые получено в [239].

Уравнение переноса тепла в классической задаче Греца имеет параболический тип. При учете осевой теплопроводности тип уравнения меняется на эллиптический. Для решения расширенной задачи Греца в работах [240–244] использовался классический метод разделения переменных, при этом решение строилось в виде ряда по собственным функциям. Однако, получаемая в процессе решения задача на собственные значения оказывалась не самосопряженной. Таким образом, спектр задачи мог содержать комплексные собственные значения, а система собственных функций могла быть не полна. Эта проблема была решена в [247] путем преобразования уравнения переноса тепла, имеющего второй порядок, к системе из двух уравнений с частными производными первого порядка. В результате была получена самосопряженная задача на собственные значения. С помощью этого метода было построены точные решения расширенной задачи Греца с кусочно–непрерывным распре-

делением температуры [247] и потока тепла [248] на стенке. Впоследствии этот подход был использован для решения задачи Греца в условиях турбулентного течения в круглых и плоских каналах [249, 250], а также в концентрической области [251].

Для решения расширенной задачи Греца также применялись другие методы: преобразование Лапласа [245], преобразование Фурье [246, 252], интегральное преобразование Штурма–Лиувилля [253]. В работе [254] было предложено решение задачи в виде ряда Грамма–Шарлье. Температура или поток тепла на стенке предполагались непрерывными функциями осевой координаты. Однако, было обнаружено лишь качественное согласие найденного решения с решением, полученным ранее в [248]. Используя аналогичную технику, в работе [255] было предложено обобщение задачи Греца на случай многокомпонентной смеси с эффектами Соре и Дюфора. Рассматривался канал между параллельными плоскостями, поддерживаемыми при различных постоянных температурах. Решения для температуры и концентрации каждого компонента строились в виде ряда по базисным функциям, зависящим от продольной координаты. Коэффициенты ряда являлись функциями поперечной координаты и находились последовательно путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Как было отмечено выше, в настоящее время активно изучается влияние диффузии и термофореза на теплообмен наножидкостей в условиях вынужденной конвекции. В связи с этим является актуальным обобщение задачи Греца на случай бинарной или многокомпонентной смеси с учетом указанных эффектов. Интерес представляет решение, описывающее тепломассообмен в круглом или плоском канале с заданным потоком тепла или заданной температурой на стенке. Заметим, что решение, построенное в работе [255], дает лишь качественное описание процессов тепломассопереноса в плоском канале с разностью температур между стенками.

## 1.5 Групповой анализ уравнений конвекции

Известно, что математические модели, описывающие движение и тепло-массообмен в жидкостях и газах, формулируются в виде дифференциальных уравнений. Одним из эффективных инструментов исследования таких уравнений служит *групповой анализ* — математическое направление, предметом которого является совместное рассмотрение непрерывных групп преобразований и допускающих эти группы дифференциальных уравнений.

Групповой анализ дифференциальных уравнений как научное направление возник в работах выдающегося норвежского математика Софуса Ли (1842–1899) [54]. Им было начато систематическое исследование непрерывных групп преобразований с целью создания теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичной теории Абеля решения алгебраических уравнений. Основные идеи и результаты С. Ли, касающиеся групп преобразований, были впоследствии развиты в многочисленных работах, однако дифференциальные уравнения на долгое время остались в стороне от этого развития. В середине XX в. американский математик Г. Биркгоф применил теорию групп к построению классов частных решений уравнений механики сплошной среды [256]. Решения, которые обладают свойством инвариантности относительно некоторой группы преобразований, оставляющей систему уравнений неизменной, он назвал "симметричными". Им также была исследована взаимосвязь теории групп преобразований с теорией размерности и подобия. Систематические исследования по применению методов группового анализа к моделям механики сплошной среды были начаты Л.В. Овсянниковым и его школой в конце 50-х годов прошлого столетия [55, 56]. В 1991 г. на Седьмом Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике Л.В. Овсянниковым была предложена программа ПОДМОДЕЛИ, направленная на полное и систематическое изучение групповых свойств моделей механики сплошной среды [60].

Приведем краткое описание основных понятий и алгоритмов группового анализа, используемых в дальнейшем. Если система дифференциальных

уравнений  $E$  остается неизменной, когда зависимые и независимые переменные подвергаются преобразованиям некоторой группы  $G$ , то говорят, что система  $E$  *допускает* группу  $G$ . В качестве примеров можно привести группу параллельных переносов по пространственным координатам, группу вращений, группы преобразований Галилея, Лоренца и другие. Эти группы допускаются многими уравнениями механики сплошной среды. Фундаментальное свойство допускаемой группы состоит в том, что *группа  $G$  действует на множестве решений системы  $E$* , переводя любое решение системы снова в решение.

Пусть  $H$  — подгруппа группы  $G$ . Решение системы  $E$  называется *инвариантным  $H$ -решением*, если оно остается неизменным под действием преобразований из подгруппы  $H$  (в этом случае говорят, что многообразие, соответствующее решению в пространстве зависимых и независимых переменных, является инвариантным многообразием подгруппы  $H$ ). Инвариантные  $H$ -решения образуют класс частных решений системы  $E$ . Они выражаются через новые искомые функции (инвариантны подгруппы  $H$ ), удовлетворяющие выводимой из  $E$  системе дифференциальных уравнений, которая называется *факторсистемой  $E/H$* . Обычно факторсистема является более простой по сравнению с исходной системой  $E$ , в частности, за счет того, что  $E/H$  содержит меньшее число независимых переменных. Поэтому факторсистема  $E/H$  называется *подмоделью* исходной модели  $E$ . Число независимых переменных в факторсистеме называется *rangом* подмодели. В стандартном случае четырехмерного пространства событий (три координаты и время), на котором определена система  $E$ , ранг подмодели может принимать значения 3, 2, 1, 0. В качестве примеров инвариантных решений можно привести стационарные решения (инвариантны относительно переносов по времени), вращательно–симметричные решения (инвариантны относительно группы вращений), автомодельные решения (инвариантны относительно группы растяжений).

Обобщение понятия инвариантного решения путем ослабления требования инвариантности приводит к понятию *частично–инвариантного  $H$ -решения*. Многообразие, соответствующее этому решению в пространстве

зависимых и независимых переменных, является частично инвариантным многообразием подгруппы  $H$ . Разность между размерностью орбиты этого многообразия (т.е. многообразия, в которое переходит данное под действием всевозможных преобразований подгруппы  $H$ ) и размерностью самого многообразия называется *дефектом* частично–инвариантного  $H$ –решения. Дефект показывает, ”насколько” данное решение не является инвариантным. Дефект инвариантного решения равен нулю, так как соответствующее ему многообразие под действием подгруппы  $H$  переходит само в себя.

Два решения системы  $E$  называются *несущественно различными* относительно группы  $G$ , если одно из них можно перевести в другое некоторым преобразованием этой группы. Если такого преобразования нет, то два решения называются *существенно различными* относительно группы  $G$ . Рассмотрим множество инвариантных  $H$ –решений, получаемых относительно всевозможных подгрупп  $H \subset G$ . Оказывается, что любые два решения из этого множества несущественно различны, если соответствующие им подгруппы сопряжены (подобны) относительно *внутренних автоморфизмов* группы  $G$ . Действие внутренних автоморфизмов разбивает множество подгрупп группы  $G$  на классы подобных. Существенно различные решения получаются относительно различных классов подобных подгрупп. Таким образом, задача перечисления всех существенно различных инвариантных решений сводится к разбиению подгрупп группы  $G$  на классы подобных и определению представителей этих классов. Совокупность таких представителей называется *оптимальной системой подгрупп* и обозначается символом  $\Theta G$ . Инвариантные решения, соответствующие подгруппам из  $\Theta G$ , образуют *оптимальную систему инвариантных решений*. Все остальные инвариантные решения можно получить из этой системы с помощью действия группы  $G$ .

В теории Ли каждой группе преобразований  $G$  ставится в соответствие некоторая алгебра дифференциальных операторов  $L$ . Это соответствие является взаимнооднозначным и распространяется на подгруппы и подалгебры. При этом внутренним автоморфизмам группы  $G$  соответствуют внутренние

автоморфизмы алгебры  $L$ , действие которых разбивает множество подалгебр алгебры  $L$  на классы подобных. Совокупность представителей этих классов называется *оптимальной системой подалгебр* и обозначается символом  $\Theta L$ . Оказывается, что задачу о нахождении оптимальной системы подгрупп  $\Theta G$  удобнее решать как задачу построения оптимальной системы подалгебр  $\Theta L$ . По этой системе однозначно восстанавливается оптимальная система инвариантных решений, которая, в свою очередь, дает совокупность инвариантных подмоделей исходной системы дифференциальных уравнений  $E$ .

Дифференциальные уравнения, описывающие физические процессы, часто содержат параметры или функции, которые находятся экспериментально и потому не строго фиксированы. В этом случае говорят, что система  $E$  содержит произвольный элемент  $A$  в виде указанных параметров или функций. Группа преобразований, допускаемая системой независимо от имеющегося в ней произвольного элемента, называется *основной группой*. При любом ограничении произвола элемента  $A$  допускаемая системой группа может только расширяться. Так возникает задача *групповой классификации*: для данной системы дифференциальных уравнений  $E$  найти основную группу и все специализации элемента  $A$ , дающие расширение основной группы.

*Преобразованием эквивалентности* системы  $E$  называется преобразование зависимых и независимых переменных, а также произвольного элемента  $A$ , которое изменяет только элемент  $A$ , сохраняя структуру системы  $E$ . Такие преобразования образуют группу, которая называется *группой преобразований эквивалентности*. Групповая классификация проводится с точностью до преобразований эквивалентности.

Перейдем к обзору литературы по изучению групповых свойств и построению точных решений основных моделей механики жидкостей и газов. Особое внимание в данном обзоре будет уделено моделям конвекции.

Исследование групповых свойств уравнений газовой динамики было впервые проведено в работах [55, 257]. Решалась задача групповой классификации уравнений относительно функции, определяющей уравнение состояния.

Показано, что если эта функция является произвольной, то уравнения допускают одинадцатимерную алгебру Ли операторов, которой соответствуют четыре переноса по координатам и времени, три галилеевых переноса и три вращения, а также преобразование растяжения координат и времени. Специализация уравнения состояния приводит к расширению допускаемой группы преобразований. Классификация инвариантных подмоделей (построение оптимальной системы подалгебр) для модели газовой динамики с общим уравнением состояния было выполнено в [61]. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных исследованию различных подмоделей. В качестве примеров можно привести особый вихрь — частично-инвариантное решение относительно полной группы вращений [258], барохронные решения, в которых плотность газа зависит только от времени [259], "простые" решения, соответствующие подмоделям ранга ноль [260], решения эволюционных подмоделей для политропного газа [261].

Группа преобразований, допускаемая уравнениями Эйлера идеальной несжимаемой жидкости, была впервые вычислена в работе [262]. В эту группу входят перенос по времени, два растяжения и три вращения. Кроме этого, имеются преобразования, соответствующие переходу в систему координат, которая движется с ускорением, произвольно зависящим от времени (в трехмерном случае таких преобразований три). Уравнения также остаются неизменными при добавлении к давлению произвольной функции времени. В связи с наличием произвольных функций алгебра Ли операторов, соответствующая допускаемой группе, является бесконечномерной. Оптимальные системы одномерных и двумерных подалгебр данной алгебры операторов были построены в работе [263]. Построение и изучение широких классов инвариантных и частично-инвариантных решений уравнений Эйлера проводилось в монографии [62].

Наиболее широкая группа, допускаемая уравнениями Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости, впервые вычислена в [264]. Свойства инвариантности этих уравнений совпадают со свойствами уравнений Эйлера с одним

исключением: имеется лишь одно преобразование растяжения времени, пространственных координат, скоростей и давления. В работах [265, 266] было проведено построение оптимальных систем первого, второго и третьего порядков для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями Навье–Стокса. Заметим, что данная задача является достаточно сложной в силу бесконечномерности допускаемой алгебры операторов. На основе полученных результатов были построены инвариантные подмодели с тремя, двумя и одной независимыми переменными и исследованы их групповые свойства. Во многих случаях полученные уравнения удалось проинтегрировать, в результате чего получены точные решения уравнений Навье–Стокса с функциональным произволом. Вопрос о физической интерпретации найденных решений в указанных работах не рассматривался. Обзор большого количества работ, посвященных точным решениям уравнений Навье–Стокса, дан в статье [267]. Изложение ведется на основе группового анализа дифференциальных уравнений. Описаны групповые свойства задач со свободной границей и приводятся примеры их точных решений. Кроме этого, выясняется теоретико–групповая природа известных точных решений и указываются их обобщения.

Следует отметить работу [268], в которой решалась задача групповой классификации уравнений неразрывности, импульса и энергии относительно компонентов тензора вязких напряжений и уравнения состояния. В результате расчетов найдены зависимости, соответствующие классическим моделям гидродинамики и их всевозможным расширениям. Указаны свойства симметрии найденных моделей. Расширенное описание результатов данной работы можно найти в монографии [63].

Групповые свойства уравнений тепловой гравитационной конвекции в приближении Обербека–Буссинеска были впервые изучены в работе [269]. Рассматривались стационарные плоские течения при постоянных физических свойствах. Показано, что допускаемая группа преобразований отличается от группы двумерных стационарных уравнений Навье–Стокса отсутствием вращения и наличием переноса по температуре с компенсирующим сдвигом давления.

Кроме этого, преобразование растяжения зависит от зависимых и независимых переменных здесь затрагивает и температуру. Легко показать, что для трехмерных уравнений конвекции появляется преобразование вращения в плоскости, перпендикулярной направлению вектора силы тяжести. В указанной выше работе также был построен ряд точных решений, описывающих конвективные течения в слоях с проницаемыми и непроницаемыми границами. Групповая классификация двумерных уравнений конвекции с коэффициентами переноса, зависящими от температуры, была проведена в [270]. В случае произвольной зависимости вязкости, теплопроводности и коэффициента теплового расширения от температуры уравнения допускают перенос по времени, переход в систему координат, которая движется с ускорением, произвольно зависящим от времени, и добавление к давлению произвольной функции времени. Специализация коэффициентов переноса приводит к расширению допускаемой группы. В процессе расчетов были обнаружены степенные, логарифмические и экспоненциальные зависимости коэффициентов от температуры. В работе также были построены точные решения, описывающие течение типа Пуазейля между параллельными пластинами, которые поддерживались при различных постоянных температурах. Эти решения соответствовали экспоненциальной и степенной зависимостям вязкости и теплопроводности от температуры.

Для уравнений Обербека–Буссинеска известно довольно много точных решений. Значительная часть этих решений приведена в монографиях [36, 37], посвященных исследованию устойчивости равновесных состояний и стационарных течений. Как правило, решения строились на основе физических соображений (исходя из геометрии задачи и граничных условий). Методы группового анализа при этом не использовались. Однако, можно показать, что большая часть решений, описывающих стационарные течения в плоских и цилиндрических слоях с различными температурными режимами на границах области, принадлежат к классу инвариантных решений относительно тех или иных подгрупп допускаемой группы преобразований. Примеры точных решений уравнений конвекции, построенных с помощью техники группового

анализа, можно найти в [40, 41, 62, 269].

В 1992 году В.В. Пухначевым была предложена модель конвекции, основанная на точных уравнениях неразрывности, импульса и энергии [271]. Предполагалось, что удельный объем линейно зависит от температуры (следовательно, плотность обратно пропорциональна линейной функции температуры). Используя уравнения неразрывности и энергии с учетом зависимости плотности от температуры, было введено модифицированное поле скорости, которое является соленоидальным. Предложенные уравнения получили название *модель микроконвекции* в силу того, что учет эффектов сжимаемости позволяет описывать течения в условиях микрогравитации или в микромасштабах. Групповые свойства данной модели, а также классификация инвариантных решений (построение оптимальных систем подалгебр) подробно описаны в монографии [40]. Построение точных решений, описывающих состояние равновесия в плоском слое и конвективное течение в вертикальном слое в рамках модели микроконвекции, проводилось в [272] и [273] соответственно. В этих работах также была исследована устойчивость полученных решений относительно малых возмущений. Результаты в области точных решений уравнений микроконвекции можно найти в [41, 62, 63].

Инвариантные свойства уравнений движения многокомпонентной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести исследовались в работе [274]. Предполагалось, что плотность является функцией концентрации компонентов общего вида, эффекты перекрестной диффузии и термодиффузии не учитывались. Показано, что уравнения допускают переносы по времени и пространственным координатам, галилеевы переносы, вращение в плоскости, перпендикулярной направлению силы тяжести, два вращения в системе координат, движущейся относительно данной с ускорением свободного падения, и добавление к давлению произвольной функции времени. Использование приближения Обербека–Буссинеска приводит к появлению преобразований перехода в систему координат, которая движется с ускорением, произвольно зависящим от времени. Кроме этого, пропадает инвариантность относительно двух вращений в системе

ме координат, движущейся с ускорением свободного падения. Групповые свойства уравнений движения бинарной смеси с учетом термодиффузии в условиях невесомости впервые изучались в работе [275]. Установлено, что в дополнение к преобразованиям, допускаемым уравнениями Навье–Стокса, рассматриваемая модель также допускает переносы по температуре и концентрации, а также одновременное растяжение этих переменных. Как показали дальнейшие расчеты (см. параграф 3.1), имеется еще одно преобразование концентрации, допускаемое этой моделью. Построение и анализ инвариантных и частичноинвариантных решений данной модели проводились в [276, 277]. Рассматривались односторонние движения бинарных смесей с поверхностью раздела в плоских и цилиндрических областях, а также двумерные движения со свободной границей.

В заключении обзора заметим, что активное использование математических моделей бинарных и многокомпонентных смесей для описания процессов тепломассообмена в условиях невесомости и под действием силы тяжести, а также в присутствии переменных силовых полей, делает актуальной задачу качественного исследования соответствующих уравнений методами группового анализа. Эта задача соответствует концепции программы ПОДМОДЕЛИ, направленной на максимальное извлечение возможностей, заложенных в свойствах симметрии уравнений механики сплошной среды. С точки зрения развития теории Ли и ее приложений к дифференциальным уравнениям, является актуальной задача классификации бесконечномерных алгебр Ли операторов, которые допускаются многими моделями механики сплошной среды. Эта задача еще не получила окончательного решения.

## Глава 2

# Термодиффузия в смесях

В данной главе дается теоретическое описание термодиффузии в бинарной и многокомпонентной смесях. Приведены выражения для потоков массы, определены коэффициенты диффузии, термодиффузии и Соре. Рассмотрены примеры жидких смесей с указанием значений коэффициентов переноса и других теплофизических параметров. Предложен формализм для описания конвекции и термодиффузии в многокомпонентных смесях на основе безразмерных параметров — отношений разделения. Сформулированы размерные и безразмерные уравнения движения смесей в приближении Обербека–Буссинеска. Результаты главы основаны на работах [70, 86].

## 2.1 Бинарные смеси

### 2.1.1 Общие сведения

Рассмотрим смесь из двух компонент. Пусть  $C$  — концентрация (массовая доля) компонента 1, тогда концентрация компонента 2 равна  $1-C$ . Компонент 2 будем называть *растворителем*, а компонент 1 — *растворенным веществом*. Будем считать, что отклонения температуры  $T$ , концентрации  $C$  и давления  $P$  от средних значений  $T_0$ ,  $C_0$ ,  $P_0$  достаточно малы. Тогда изменения плотности смеси во времени и пространстве также будут малыми. В дальнейшем предполагается, что плотность зависит от температуры и концентрации и не зависит от давления.

Будем считать, что градиент давления не вызывает сколько-нибудь су-

щественного молекулярного движения компонентов смеси относительно друг друга (*бародиффузия* отсутствует). Тогда плотность потока массы компонента 1 можно записать в виде

$$\mathcal{J} = -\rho_0(\mathcal{D}\nabla C + \mathcal{D}_T\nabla T), \quad (2.1)$$

где  $\rho_0$  — плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации,  $\mathcal{D}$  — коэффициент диффузии,  $\mathcal{D}_T$  — коэффициент термодиффузии. Эти коэффициенты, вообще говоря, зависят от температуры и концентрации. Однако при сделанных выше предположениях их можно считать постоянными величинами, значения которых соответствуют средним значениям температуры и концентрации:  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T_0, C_0)$ ,  $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_T(T_0, C_0)$ . Поток массы (2.1), вызванный молекулярным движением компонентов смеси относительно друг друга, будем называть *диффузионным потоком* (в отличие от *конвективного потока* массы, который обусловлен макроскопическим движением смеси). Сумма диффузионных потоков компонентов смеси должна равняться нулю, поэтому плотность потока массы компонента 2 равна  $-\mathcal{J}$ .

Так как в однокомпонентной среде эффект Соре отсутствует, то коэффициент термодиффузии может быть записан в виде

$$\mathcal{D}_T = C_0(1 - C_0)\mathcal{D}'_T. \quad (2.2)$$

Это выражение широко используется при описании бинарных смесей. Величину  $\mathcal{D}'_T$  также называют коэффициентом термодиффузии [5]. Заметим, что коэффициент диффузии всегда положителен, в то время как коэффициент термодиффузии может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от вида смеси (а также от средней температуры и средней концентрации выбранного компонента [278]). При  $\mathcal{D}_T < 0$  ( $\mathcal{D}_T > 0$ ) направления градиента температуры и термодиффузионного потока массы  $-\rho_0\mathcal{D}_T\nabla T$  совпадают (противоположны), в результате чего компонент 1 перемещается в более нагретую (более холодную) область. Термодиффузия в бинарной смеси называется *нормальной* (*аномальной*), если легкий компонент перемещается в более нагретую (более холодную) область под действием градиента температуры.

Пусть смесь находится в области  $\Omega$  с непроницаемой границей  $\partial\Omega$  в состоянии механического равновесия. В области создается неоднородное распределение температуры (например, путем подогрева одной части границы и охлаждения другой). Тогда через некоторое время система достигает стационарного состояния. Распределение концентрации в данном состоянии определяется из стационарного уравнения переноса массы, дополненного условием отсутствия диффузационного потока через границу области:

$$\nabla \cdot \mathcal{J} = 0, \quad \mathcal{J} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к границе области. Здесь температура  $T$  в выражении (2.1) определяется как решение стационарного уравнения переноса тепла с соответствующим граничным условием. Введем обозначение  $H = \rho_0(\mathcal{D}C + \mathcal{D}_T T)$  и перепишем задачу (2.3) в виде

$$\nabla^2 H = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Отсюда следует  $\nabla H = 0$  в любой точке области  $\Omega$  [279], т.е. диффузионный поток в стационарном состоянии исчезает. В результате в смеси устанавливается градиент концентрации, пропорциональный градиенту температуры

$$\nabla C = -\frac{\mathcal{D}_T}{\mathcal{D}} \nabla T. \quad (2.4)$$

Связь между градиентами концентрации и температуры может быть описана с помощью *коэффициента Соре*, который определяется соотношением

$$\nabla C = -\mathcal{S}_T \nabla T, \quad (2.5)$$

откуда с учетом (2.4) имеем

$$\mathcal{S}_T = \mathcal{D}_T / \mathcal{D}. \quad (2.6)$$

Используя (2.2), этот коэффициент можно записать в виде

$$\mathcal{S}_T = C_0(1 - C_0) \frac{\mathcal{D}'_T}{\mathcal{D}} = C_0(1 - C_0) \mathcal{S}'_T, \quad (2.7)$$

где  $\mathcal{S}'_T = \mathcal{D}'_T / \mathcal{D}$ . Величину  $\mathcal{S}'_T$  также называют коэффициентом Соре, причем именно это определение обычно используется при описании бинарных смесей [5]. Коэффициенты  $\mathcal{D}_T$  и  $\mathcal{S}_T$ , связанные с коэффициентами  $\mathcal{D}'_T$  и  $\mathcal{S}'_T$  формулами (2.2) и (2.7) соответственно, введены для совместности с описанием

многокомпонентных смесей (см. параграф 2.2). Заметим, что определение (2.5) можно также применить ко второму компоненту смеси. Концентрация этого компонента равна  $1 - C$ , поэтому его коэффициент Соре равен  $-\mathcal{S}_T$ .

Как уже говорилось во Введении и Главе 1, эффект термодиффузии может существенно влиять на естественную конвекцию в смесях, вызванную неоднородностью плотности в поле силы тяжести. Плотность бинарной смеси зависит от температуры и концентрации. Мы пренебрегли изменением плотности в выражении для диффузионного потока (2.1). Однако при моделировании конвективных течений неоднородности плотности следует учитывать в уравнениях движения, так как именно они приводят к изменению силы плавучести. Для градиента плотности справедливо равенство

$$\nabla\rho = \frac{\partial\rho}{\partial T}\nabla T + \frac{\partial\rho}{\partial C}\nabla C.$$

При небольших изменениях температуры и концентрации производные  $\partial\rho/\partial T$  и  $\partial\rho/\partial C$  можно считать постоянными. При условии, что соотношение (2.4) выполнено, отношение градиентов плотности, вызванных градиентами концентрации и температуры, дается формулой [105]

$$\psi \equiv \frac{\frac{\partial\rho}{\partial C}\nabla C}{\frac{\partial\rho}{\partial T}\nabla T} = -\frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\mathcal{D}_T}{\mathcal{D}}. \quad (2.8)$$

Безразмерный параметр  $\psi$  называется *отношением разделения (separation ratio)*. Величины  $\beta_T$  и  $\beta_C$  есть коэффициенты теплового и концентрационного расширения соответственно:

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial T} \Big|_{T=T_0, C=C_0}, \quad \beta_C = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial C} \Big|_{T=T_0, C=C_0}. \quad (2.9)$$

Коэффициент  $\beta_C$  положителен (отрицателен), если  $C$  — концентрация легкого (тяжелого) компонента. Отношение разделения (2.8) не зависит от выбора растворителя (компонента 2), так как замена растворителя приводит к изменению знаков  $\beta_C$  и  $\mathcal{D}_T$  на противоположные. Если  $\beta_T > 0$ , что справедливо для большинства жидкостей и газов, то положительные (отрицательные) значения  $\psi$  соответствуют случаю, когда легкий компонент перемещается в более

нагретую (холодную) область в результате термодиффузии. При этом соответствующий эффект термодиффузии является нормальным (аномальным). Отношение разделения также можно выразить через коэффициент Соре

$$\psi = -\frac{\beta_C}{\beta_T} \mathcal{S}_T = -\frac{\beta_C}{\beta_T} C_0(1 - C_0) \mathcal{S}'_T. \quad (2.10)$$

Учитывая (2.8), градиент плотности можно переписать в виде

$$\nabla\rho = (1 + \psi) \frac{\partial\rho}{\partial T} \nabla T. \quad (2.11)$$

Отсюда видно, что при  $\psi > 0$  термодиффузия приводит к увеличению абсолютной величины градиента плотности по сравнению со случаем чисто теплового расширения. В области  $-1 < \psi < 0$  эта величина уменьшается. При  $\psi = -1$  градиенты плотности, вызванные неоднородностью температуры и концентрации, компенсируют друг друга, и плотность смеси становится постоянной. Наконец, в случае  $\psi < -1$  направление градиента плотности меняется на противоположное по сравнению со случаем чисто теплового расширения. Как будет показано в дальнейшем, во многих задачах безразмерное отношение разделения  $\psi$  характеризует влияние термодиффузационного разделения на конвекцию в смеси.

### 2.1.2 Уравнения движения

Как уже отмечалось выше, мы рассматриваем такие системы, в которых отклонения температуры  $T$ , концентрации  $C$  и давления  $P$  от средних значений невелики, а плотность есть функция от  $T$  и  $C$ . Термофизические свойства смеси считаются постоянными. Кроме этого, предполагается, что характерная скорость движения много меньше скорости звука в рассматриваемой среде. При данных предположениях смесь можно считать несжимаемой.

Для описания движения смеси будем использовать модель Обербека–Буссинеска с уравнением состояния

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_C(C - C_0)). \quad (2.12)$$

Будем считать, что смесь находится в поле силы тяжести с вектором ускорения свободного падения  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ . Тогда уравнения движения бинарной смеси

имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\rho_0^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{g}(\beta_T(T - T_0) + \beta_C(C - C_0)), \\ \partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \chi \nabla^2 T, \\ \partial_t C + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C &= \mathcal{D} \nabla^2 C + \mathcal{D}_T \nabla^2 T, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  — вектор координат,  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  — вектор скорости,  $p$  — отклонение полного давления  $P$  от гидростатического ( $p = P - \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ ),  $\nu$  и  $\chi$  — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности соответственно.

При решении конкретных задач удобно выделить характерные безразмерные величины (критерии подобия). Пусть  $L$  — характерный размер,  $\Delta T$  — характерная разность температур в системе. Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} t &= \frac{L^2}{\nu} t^*, & \mathbf{x} &= L \mathbf{x}^*, & \mathbf{u} &= \frac{\nu}{L} \mathbf{u}^*, \\ p &= \rho_0 \frac{\nu^2}{L^2} p^*, & T - T_0 &= \Delta T T^*, & C - C_0 &= \frac{\beta_T \Delta T}{\beta_C} C^*. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Подставим (2.14) в уравнения (2.13) и, опуская для простоты верхние индексы у безразмерных переменных, запишем уравнения движения в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \text{Gr}(T + C) \mathbf{e}_3, \\ \partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \text{Pr}^{-1} \nabla^2 T, \\ \partial_t C + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C &= \text{Sc}^{-1} (\nabla^2 C - \psi \nabla^2 T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Система содержит четыре безразмерных параметра: число Грасгофа

$$\text{Gr} = \frac{g \beta_T \Delta T L^3}{\nu^2},$$

которое характеризует отношение силы плавучести к силе вязкого трения;

числа Прандтля  $\text{Pr} = \nu/\chi$  и Шмидта  $\text{Sc} = \nu/\mathcal{D}$ , которые характеризуют относительную интенсивность переноса количества движения и молекулярного переноса тепла и массы соответственно; отношение разделения

$$\psi = -\frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\mathcal{D}_T}{\mathcal{D}},$$

которое характеризует эффект термодиффузии.

Заметим, что безразмерные переменные в уравнениях (2.13) могут быть введены и по-другому. При этом вместо числа Грасгофа может использоваться число Рэлея

$$\text{Ra} = \text{Gr} \text{Pr} = \frac{g\beta_T \Delta T L^3}{\nu\chi}$$

а вместо числа Шмидта — число Льюиса

$$\text{Le} = \frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} = \frac{\chi}{\mathcal{D}},$$

характеризующее относительную интенсивность процессов теплопроводности и диффузии.

### 2.1.3 Пример смеси этанол–вода

Рассмотрим зависимость физических свойств от средней концентрации на примере смеси этанол ( $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ ) — вода ( $\text{H}_2\text{O}$ ). В качестве растворителя выберем воду и обозначим через  $C$  концентрацию (массовую долю) этанола.

Зависимость физических свойств смеси и безразмерных параметров от средней концентрации этанола  $C_0$  при температуре  $T_0 = 25^\circ\text{C}$  представлена в Таблице 2.1, а также на рисунках 2.1 и 2.2. Представленные зависимости основаны на экспериментальных данных из работ [280–284]. Как видно из рис. 2.2 (а) и 2.2 (б), коэффициенты диффузии и термодиффузии существенно зависят от  $C_0$ . Коэффициент термодиффузии  $\mathcal{D}'_T$  положителен при  $0 < C_0 < 0.29$ . В данном диапазоне концентраций этанол (легкий компонент) перемещается в более холодную область в результате термодиффузии, что соответствует аномальному эффекту Соре (при этом отношение разделения  $\psi < 0$ ). Напомним, что во многих практических случаях термодиффузационное разделение мало

Таблица 2.1. Физические свойства и безразмерные параметры для смеси этанол–вода при  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ .

Размерность	Средняя концентрация (массовая доля) этанола $C_0$							Источник				
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6					
$\rho_0$ кг/м <sup>3</sup>	997.1	980.4	966.4	950.7	931.5	909.9	887.0	863.4	839.1	813.6	785.1	[280]
$\beta_T$ $10^{-3}$ 1/К	0.256	0.319	0.486	0.674	0.803	0.882	0.941	0.994	1.038	1.076	1.094	[280]
$\beta_C$												[280]
$\mu$ $10^{-3}$ Па·с	0.894	1.328	1.808	2.203	2.374	2.368	2.232	2.025	1.738	1.422	1.101	[281]
$\kappa$ Вт/м·К	0.605	0.527	0.460	0.414	0.362	0.313	0.274	0.245	0.213	0.185	0.161	[281]
$c_p$ Дж/кг·К	4181	4268	4310	4268	4100	3849	3598	3368	3075	2782	2437	[281]
$\nu$ $10^{-6}$ м <sup>2</sup> /с	0.897	1.355	1.871	2.317	2.549	2.603	2.516	2.345	2.071	1.748	1.402	
$\chi$ $10^{-7}$ м <sup>2</sup> /с	1.451	1.259	1.105	1.022	0.948	0.895	0.859	0.843	0.825	0.817	0.839	
$\mathcal{D}$ $10^{-10}$ м <sup>2</sup> /с	9.483	7.171	5.403	4.213	3.634	3.708	4.481	6.002	8.328			[282]
$\mathcal{D}'_T$ $10^{-12}$ м <sup>2</sup> /с·К	6.337	2.343	-0.106	-1.424	-1.966	-2.026	-1.834	-1.561	-1.316			[283,284]
$\mathcal{S}'_T$ $10^{-3}$ 1/К	6.682	3.267	-0.196	-3.380	-5.410	-5.464	-4.093	-2.601	-1.580			
Pr	6.18	10.76	16.93	22.68	26.89	29.01	29.30	27.83	25.10	21.39	16.71	
Sc												
$\psi$	-0.285	-0.160	0.011	0.224	0.377	0.365	0.240	0.118	0.043			

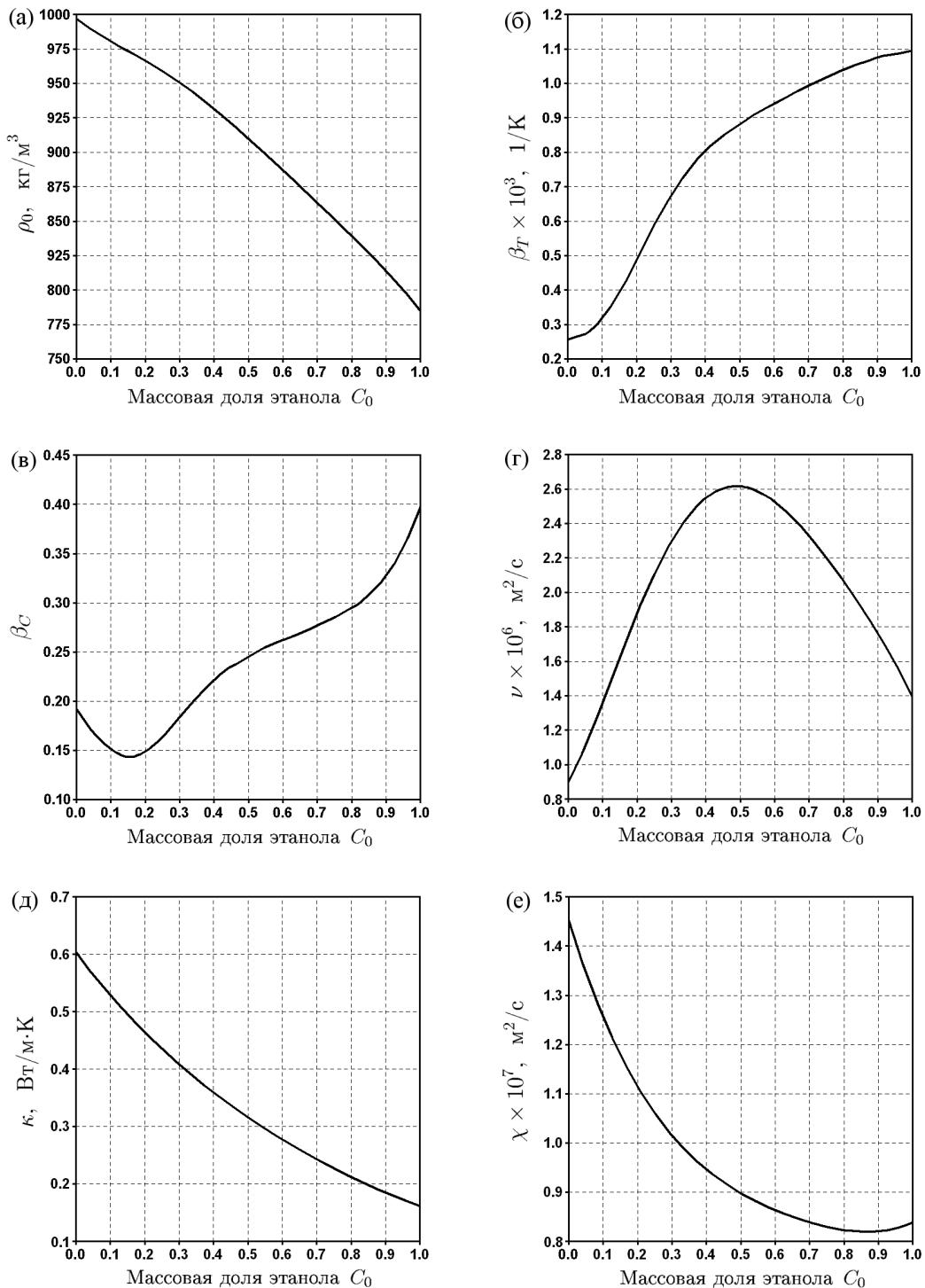


Рис. 2.1. Физические свойства смеси этанол—вода при  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ : (а) плотность  $\rho_0$ ; (б) коэффициент теплового расширения  $\beta_T$ ; (в) коэффициент концентрационного расширения  $\beta_C$ ; (г) кинематическая вязкость  $\nu$ ; (д) теплопроводность  $\kappa$ ; (е) температуропроводность  $\chi$ .

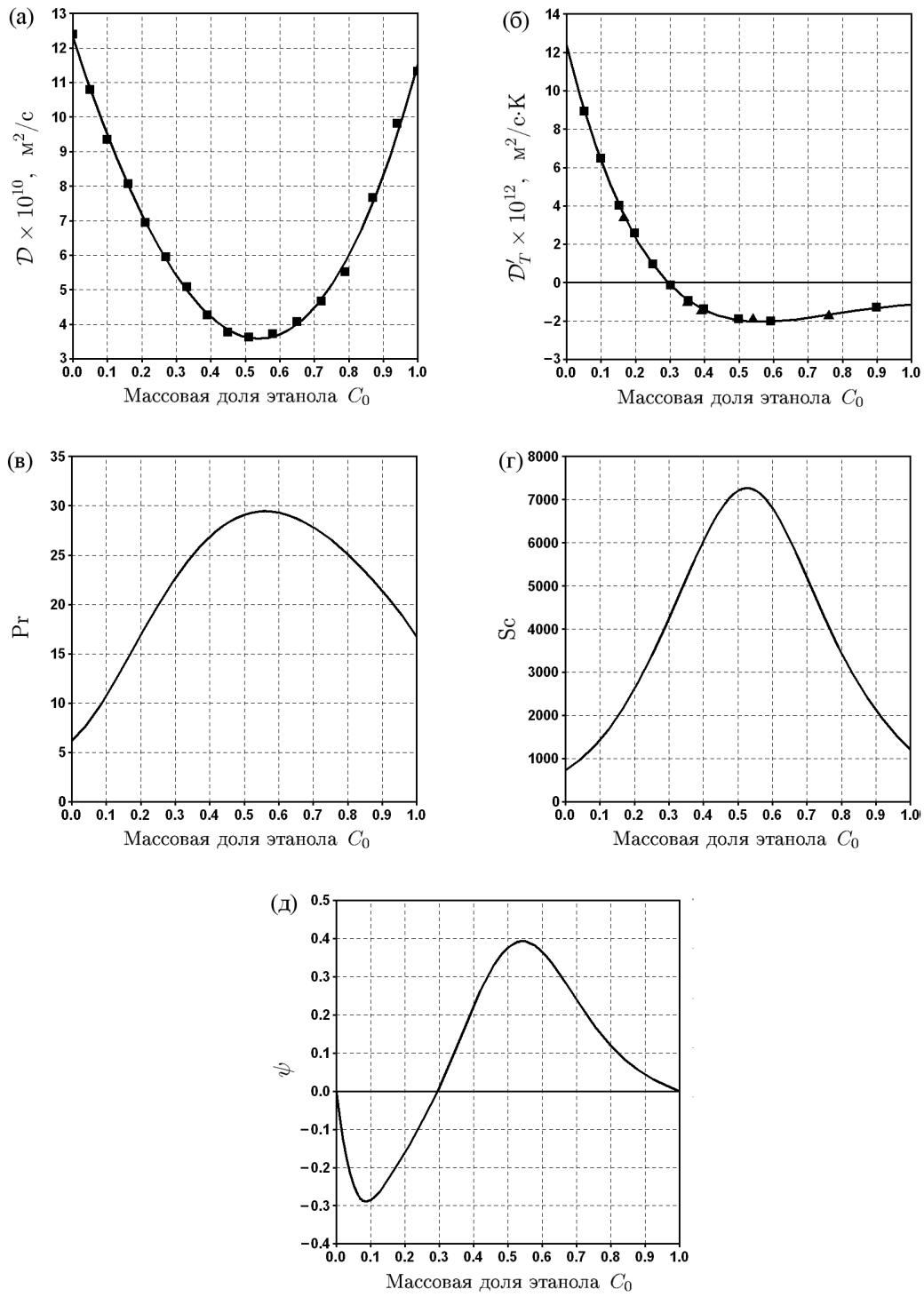


Рис. 2.2. Физические свойства и безразмерные параметры смеси этанол—вода при  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ : (а) коэффициент диффузии  $\mathcal{D}$  [282]; (б) коэффициент термодиффузии  $\mathcal{D}'_T$  (■ [284], ▲ [283]); (в) число Прандтля  $\text{Pr}$ ; (г) число Шмидта  $\text{Sc}$ ; (д) отношение разделения  $\psi$ .

и отклонения концентрации от среднего значения  $C_0$  не превышают нескольких процентов. При  $0.29 < C_0 < 1$  коэффициент термодиффузии  $\mathcal{D}'_T$  отрицателен. В данном случае этанол перемещается в более нагретую область под действием термодиффузии, что соответствует нормальному эффекту Соре (при этом отношение разделения  $\psi > 0$ ).

## 2.2 Многокомпонентные смеси

### 2.2.1 Теоретическое описание

Рассмотрим смесь из  $n$  компонентов и выберем компонент  $n$  в качестве растворителя. Обозначим через  $C_i$  концентрацию компонента  $i$ . Для описания состава смеси достаточно указать вектор концентраций (массовых долей)  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{n-1})^T$  (индекс  $T$  указывает на вектор-столбец). Сумма концентраций всех компонентов равна 1.

В многокомпонентной смеси плотность диффузионного потока компонента  $i$  дается формулой

$$\mathbf{J}_i = -\rho_0 \sum_{j=1}^{n-1} D_{ij} \nabla C_j - \rho_0 D_{Ti} \nabla T, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (2.15)$$

где  $D_{ij}$  — коэффициенты диффузии,  $D_{Ti}$  — коэффициенты термодиффузии. Величины  $D_{ij}$  при  $i = j$  называются главными коэффициентами диффузии, а при  $i \neq j$  — перекрестными коэффициентами диффузии. Будем считать, что справедливы все предположения, описанные в параграфе 2.1. Таким образом, коэффициенты переноса являются постоянными величинами, соответствующими средним значениям температуры  $T_0$  и концентраций  $\mathbf{C}_0 = (C_{10}, \dots, C_{n-1,0})^T$ . Диффузионный поток  $\mathbf{J}_n$  определяется из условия равенства нулю суммы потоков всех компонентов. Для бинарной смеси ( $n = 2$ ) выражение (2.15) сводится к (2.1), если положить  $C_1 \equiv C$ ,  $D_{11} \equiv \mathcal{D}$ ,  $D_{T1} \equiv \mathcal{D}_T$ .

Так как диффузионный поток компонента  $i$  должен обращаться в ноль в предельных случаях  $C_{i0} = 0$  и  $C_{i0} = 1$ , то коэффициенты термодиффузии могут быть записаны в виде  $D_{Ti} = C_{i0}(1 - C_{i0}) D'_{Ti}$ , где величины  $D'_{Ti}$  также

могут выступать в качестве коэффициентов термодиффузии [29]. Однако, мы не будем пользоваться этим определением в дальнейшем.

Введем вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= (\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_{n-1})^T, & \nabla \mathbf{C} &= (\nabla C_1, \dots, \nabla C_{n-1})^T, \\ \mathbf{D}_T &= (D_{T1}, \dots, D_{Tn-1})^T, \end{aligned} \quad (2.16)$$

и квадратную матрицу  $D$  размерности  $(n - 1) \times (n - 1)$  из коэффициентов диффузии  $D_{ij}$ . Заметим, что  $\det D > 0$  [285]. Потоки (2.15) можно записать в векторной форме

$$\mathbf{J} = -\rho_0 (D \nabla \mathbf{C} + \mathbf{D}_T \nabla T), \quad (2.17)$$

которая напоминает выражение (2.1) для бинарной смеси. Соотношение (2.17) следует понимать как три независимых равенства, которые соответствуют пространственным компонентам потоков и градиентов концентраций и температуры. По аналогии со случаем бинарной смеси, можно показать, что в состоянии стационарного механического равновесия в области с непроницаемой границей диффузионные потоки компонентов исчезают. В данном состоянии градиенты концентраций и градиент температуры связаны соотношением

$$\nabla \mathbf{C} = -D^{-1} \mathbf{D}_T \nabla T, \quad (2.18)$$

где  $D^{-1}$  — обратная матрица. Это соотношение следует понимать как три независимых равенства:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} = -D^{-1} \mathbf{D}_T \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial y} = -D^{-1} \mathbf{D}_T \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial z} = -D^{-1} \mathbf{D}_T \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Связь между градиентами концентраций и градиентом температуры может быть описана с помощью коэффициентов Соре  $S_{Ti}$ , которые определяются соотношениями [283]

$$\nabla C_i = -S_{Ti} \nabla T, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.19)$$

Это определение справедливо для всех компонентов и не зависит от выбора растворителя (компонента  $n$ ). Если коэффициент  $S_{Ti}$  отрицателен (положителен), то направление градиента концентрации компонента  $i$  и градиента

температуры совпадают (противоположны). Таким образом, данный компонент перемещается в более нагретую (более холодную) область под действием термодиффузии. Из (2.19) следует

$$\sum_{i=1}^n S_{Ti} = 0. \quad (2.20)$$

Введем вектор  $\mathbf{S}_T = (S_{T1}, \dots, S_{Tn-1})^T$  и, используя (2.18), получим выражение для коэффициентов Соре

$$\mathbf{S}_T = D^{-1} \mathbf{D}_T. \quad (2.21)$$

Коэффициент Соре компонента  $n$  определяется из условия (2.20). Для бинарной смеси формула (2.21) сводится к (2.6). Заметим, что по аналогии с коэффициентами термодиффузии  $D'_{Ti}$  можно ввести коэффициенты Соре  $S'_{Ti}$ , определяемые соотношениями  $S_{Ti} = C_{i0}(1 - C_{i0}) S'_{Ti}$  [70], однако это определение не будет использоваться в дальнейшем.

Перейдем к обобщению безразмерного параметра *отношение разделения* на случай многокомпонентной смеси. Такое обобщение было впервые предложено в работе [70]. Плотность многокомпонентной смеси есть функция температуры и концентрации компонентов:  $\rho = \rho(T, \mathbf{C})$ . Тогда градиент плотности можно записать в виде

$$\nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial T} \nabla T + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \rho}{\partial C_i} \nabla C_i.$$

Определим отношение разделения  $\psi_i$  компонента  $i$  как отношение градиентов плотности, вызванных градиентом концентрации компонента  $i$  и градиентом температуры при условии, что последние связаны соотношением (2.18):

$$\psi_i \equiv \frac{\frac{\partial \rho}{\partial C_i} \nabla C_i}{\frac{\partial \rho}{\partial T} \nabla T} = \frac{\beta_i}{\beta_T} \frac{\nabla C_i}{\nabla T}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (2.22)$$

Здесь  $\beta_T$  — коэффициент теплового расширения (см. (2.9)), а  $\beta_i$  — коэффициенты концентрационного расширения, определяемые формулами

$$\beta_i = -\frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial C_i} \right|_{T=T_0, \mathbf{C}=\mathbf{C}_0}. \quad (2.23)$$

Предположим, что коэффициент теплового расширения  $\beta_T$  положителен. Тогда положительные значения отношения разделения  $\psi_i$  соответствуют случаю, когда компонент  $i$  в результате термодиффузии перемещается в более нагретую или более холодную область в зависимости от того, легче он ( $\beta_i > 0$ ) или тяжелее ( $\beta_i < 0$ ), чем растворитель (т.е. компонент  $n$ ). Отрицательные значения  $\psi_i$  соответствуют случаю, когда легкий (тяжелый) компонент  $i$  перемещается в более холодную (более нагретую) область.

Введем вектор  $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_{n-1})^T$  и диагональную матрицу

$$B = \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}. \quad (2.24)$$

Используя (2.18), из (2.22) получим формулу для отношений разделения компонентов:

$$\boldsymbol{\psi} \equiv -\beta_T^{-1} B D^{-1} \mathbf{D}_T. \quad (2.25)$$

Запишем это соотношение в координатной форме:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} \equiv -\frac{1}{\beta_T} \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n-1,1} & \dots & D_{n-1,n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_{T1} \\ \vdots \\ D_{Tn-1} \end{pmatrix}.$$

Для бинарной смеси ( $n = 2$ ) формула (2.25) сводится к определению (2.8). Используя (2.21) и (2.25), можно выразить отношения разделения через коэффициенты Соре:  $\boldsymbol{\psi} = -\beta_T^{-1} B \mathbf{S}_T$ , или в координатной форме

$$\psi_i = -\frac{\beta_i}{\beta_T} S_{Ti}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Таким образом, формула (2.10) допускает простое обобщение на случай многокомпонентной смеси.

Для описания относительного вклада градиентов концентрации компонентов и градиента температуры в изменение плотности смеси введем *суммарное отношение разделения*:

$$\Psi \equiv \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \rho}{\partial C_i} \nabla C_i}{\frac{\partial \rho}{\partial T} \nabla T} = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i. \quad (2.26)$$

Тогда градиент плотности многокомпонентной смеси может быть записан в виде

$$\nabla \rho = (1 + \Psi) \frac{\partial \rho}{\partial T} \nabla T. \quad (2.27)$$

Это соотношение аналогично соотношению (2.11) для бинарной смеси. Поэтому рассуждения о влиянии термодиффузии на изменение плотности, приведенные в параграфе 2.1, справедливы и для случая многокомпонентной смеси, если вместо отношения разделения  $\psi$  рассматривать суммарное отношение разделения  $\Psi$ .

Выясним, влияет ли выбор растворителя на значения отношений разделения  $\psi_i$  и  $\Psi$ . Пусть компонент  $k \neq n$  выбран в качестве растворителя вместо компонента  $n$ . Тогда плотность смеси можно представить как функцию температуры и остальных компонентов смеси:

$$\begin{aligned} \rho' (T, C_1, \dots, C_{k-1}, C_{k+1}, \dots, C_n) &= \\ &= \rho (T, C_1, \dots, C_{k-1}, 1 - \sum_{i \neq k} C_i, C_{k+1}, \dots, C_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.28)$$

где функция  $\rho$  соответствует исходному выбору растворителя. В этом случае отношения разделения определяются по формулам

$$\psi'_i \equiv \frac{\frac{\partial \rho'}{\partial C_i} \nabla C_i}{\frac{\partial \rho'}{\partial T} \nabla T}, \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq k.$$

Принимая во внимание (2.22), (2.23) и (2.28), найдем

$$\psi'_i = \frac{\left( \frac{\partial \rho}{\partial C_i} - \frac{\partial \rho}{\partial C_k} \right) \nabla C_i}{\frac{\partial \rho}{\partial T} \nabla T} = \psi_i \left( 1 - \frac{\beta_k}{\beta_i} \right), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad i \neq k. \quad (2.29)$$

Отношение разделения компонента  $n$  имеет вид

$$\psi'_n = \frac{-\frac{\partial \rho}{\partial C_k} \nabla C_n}{\frac{\partial \rho}{\partial T} \nabla T} = \frac{\frac{\partial \rho}{\partial C_k} \sum_{i=1}^{n-1} \nabla C_i}{\frac{\partial \rho}{\partial T} \nabla T} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta_k}{\beta_i} \psi_i. \quad (2.30)$$

Суммирование величин  $\psi'_i$  дает

$$\sum_{i \neq k} \psi'_i = \sum_{i \neq n} \psi_i = \Psi.$$

Отсюда следует, что параметр  $\Psi$  не зависит от выбора растворителя. Таким образом, суммарное отношение разделения однозначно определено для данной многокомпонентной смеси и является ее физическим свойством. Однако, отношения разделения компонентов зависят от выбора растворителя. При замене последнего они преобразуются согласно формулам (2.29), (2.30).

### 2.2.2 Уравнения движения

Для описания движения многокомпонентной смеси будем использовать модель Обербека–Буссинеска с уравнением состояния

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left( 1 - \beta_T(T - T_0) - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(C_i - C_{i0}) \right) = \\ &= \rho_0 \left( 1 - \beta_T(T - T_0) - \mathbf{I} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{C} - \mathbf{C}_0) \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Здесь  $\mathbf{I} = (1, \dots, 1)$  — вектор размерности  $n-1$  и  $\mathbf{B}$  — диагональная матрица (2.24). Предполагается, что смесь находится в поле силы тяжести с вектором ускорения свободного падения  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ . Уравнения движения смеси имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\rho_0^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{g} (\beta_T(T - T_0) + \mathbf{I} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)), \\ \partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \chi \nabla^2 T, \\ \partial_t \mathbf{C} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{C} &= D \nabla^2 \mathbf{C} + \mathbf{D}_T \nabla^2 T, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Введем безразмерные время, вектор координат, вектор скорости, давление и температуру согласно (2.14) и безразмерный вектор концентраций

$$\mathbf{C} - \mathbf{C}_0 = \beta_T \Delta T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}^*. \quad (2.33)$$

Отбрасывая для простоты верхние индексы у безразмерных переменных, за-

пишем уравнения движения (2.32) в безразмерной форме

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \text{Gr}(T + \mathbf{I} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{e}_3, \\ \partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \text{Pr}^{-1} \nabla^2 T, \\ \partial_t \mathbf{C} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{C} &= \mathcal{SC} (\nabla^2 \mathbf{C} - \boldsymbol{\psi} \nabla^2 T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Система содержит следующие безразмерные параметры: число Грасгофа  $\text{Gr}$ , число Прандтля  $\text{Pr}$ , вектор отношений разделения  $\boldsymbol{\psi}$  размерности  $n - 1$  (см. (2.25)), и матрицу  $(n - 1) \times (n - 1)$  безразмерных параметров

$$\mathcal{SC} = \nu^{-1} BDB^{-1}, \quad \{\mathcal{SC}\}_{ij} = \frac{\beta_i}{\beta_j} \text{Sc}_{ij}^{-1}, \quad i, j = 1, \dots, n - 1. \tag{2.35}$$

Здесь  $\text{Sc}_{ij} = \nu/D_{ij}$  — числа Шмидта. Для бинарной смеси эта матрица сводится к  $\mathcal{SC} = \mathcal{D}/\nu = \text{Sc}^{-1}$ , где  $\text{Sc}$  — число Шмидта.

### 2.2.3 Пример тройной смеси

В качестве примера рассмотрим тройную смесь углеводородов додекан ( $C_{12}H_{26}$ ) — изобутилбензол ( $C_{10}H_{14}$ ) — тетралин ( $C_{10}H_{12}$ ). Данные компоненты типичны для смесей, залегающих в природных месторождениях углеводородов. В связи с этим несколько европейских лабораторий провели экспериментальные измерения коэффициентов переноса в бинарных смесях, которые можно составить из указанных выше компонентов (сравнительный тест Фонтенбло) [32]. В последнее время ведутся экспериментальные исследования свойств переноса тройной смеси додекан—изобутилбензол—тетралин. Значения теплофизических свойств данной смеси по данным работы [286], а также коэффициентов диффузии, термодиффузии и Соре по данным работы [107] представлены в Таблице 2.2. Эти значения соответствуют средним концентрациям  $C_{i0} = 1/3$ ,  $i = 1, 2, 3$  и температуре  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ . В качестве растворителя выбран наиболее тяжелый компонент (тетралин). Как видно из таблицы, додекан и изобутилбензол перемещаются в более нагретую область в результате эффекта Соре, а тетралин — в более холодную область. В таблице также

Таблица 2.2. Физические свойства и безразмерные параметры для смеси додекан—изобутилбензол—тетралин при температуре  $T_0 = 25^\circ\text{C}$  [107, 286].

Компонент 1 — додекан, компонент 2 — изобутилбензол. Средние концентрации компонентов  $C_{i0} = 1/3$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

$\rho_0$	$\beta_T$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\nu$
кг/м <sup>3</sup>	$10^{-3}$ 1/К			$10^{-6}$ м <sup>2</sup> /с
843.5	0.914	0.258	0.121	1.528
$D_{11}$	$D_{12}$	$D_{21}$	$D_{22}$	$D_{T1}$
		$10^{-10}$ м <sup>2</sup> /с		$10^{-12}$ м <sup>2</sup> /с К
6.70	0.43	-1.08	11.10	-0.81
Sc <sub>11</sub>	Sc <sub>12</sub>	Sc <sub>21</sub>	Sc <sub>22</sub>	$S_{T1}$
				$10^{-3}$ 1/К
2281	35535	-14148	1377	-1.15
$\psi_1$	$\psi_2$	$\Psi$		
0.324	0.126	0.450		

приведены значения безразмерных параметров — чисел Шмидта и отношений разделения компонентов. К сожалению, для данной смеси неизвестно значение коэффициента температуропроводности. Использование типичного для жидких смесей значения  $\chi = 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с [107] дает число Прандтля  $\text{Pr} = 15.28$ .

# Глава 3

## Групповой анализ уравнений движения смесей

Исследуются групповые свойства уравнений движения бинарной смеси с учетом термодиффузии. Найдена основная алгебра Ли операторов, вычислены преобразования эквивалентности и решена задача групповой классификации относительно постоянных физических параметров. Проведена классификация инвариантных решений: построены оптимальные системы подалгебр первого и второго порядков для бесконечномерной алгебры операторов, допускаемой уравнениями плоских движений. Описаны групповые свойства уравнений движения многокомпонентной смеси. Показана возможность исключения коэффициентов перекрестной диффузии из данных уравнений. Изучены групповые свойства модели вибрационной конвекции бинарной смеси. Решена задача групповой классификации осредненных уравнений относительно постоянных физических параметров. Результаты данной главы основаны на работах [64–69, 71, 74, 82, 86–91, 95]. Обзор работ по тематике главы был дан в параграфе 1.5.

### 3.1 Модель конвекции бинарной смеси

#### 3.1.1 Групповые свойства

Рассмотрим уравнения движения бинарной смеси с учетом эффекта термодиффузии в поле силы тяжести (см. (2.13)):

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\rho_0^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{g}(\beta_T T + \beta_C C), \\
\partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \chi \nabla^2 T, \\
\partial_t C + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C &= \mathcal{D} \nabla^2 C + \mathcal{D}_T \nabla^2 T, \\
\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь через  $T$  и  $C$  обозначены отклонения температуры и концентрации от средних значений  $T_0$  и  $C_0$  соответственно,  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$  и  $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ .

Поставим задачу о нахождении алгебры Ли операторов и соответствующей группы преобразований, допускаемых системой (3.1). Эта задача была впервые решена в работе [65]. Будем предполагать, что коэффициенты теплового и концентрационного расширений  $\beta_T$  и  $\beta_C$ , а также коэффициент термодиффузии  $\mathcal{D}_T$  могут обращаться в ноль. Такой подход позволяет выяснить зависимость групповых свойств модели от того, какие эффекты в ней учитываются (термодиффузия, зависимость плотности от температуры и концентрации). Заметим, что с точки зрения группового анализа случай  $\mathbf{g} = 0$  эквивалентен случаю  $\beta_T = \beta_C = 0$ . Поэтому в дальнейшем считается, что вектор ускорения свободного падения отличен от нуля. Кроме этого, предполагается, что  $\rho_0, \nu, \chi, \mathcal{D}$  — положительные постоянные.

Пусть  $f(t, \mathbf{x})$  — некоторая функция, тогда ее производные обозначаются в соответствии с равенствами

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f_t, \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = f_i, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^i} = f_{ti}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = f_{ij},$$

где  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \leq j$ . Используя эти обозначения, запишем систему (3.1) в координатной форме:

$$u_t^1 + u^1 u_1^1 + u^2 u_2^1 + u^3 u_3^1 + \rho_0^{-1} p_1 - \nu(u_{11}^1 + u_{22}^1 + u_{33}^1) = 0, \tag{3.2}$$

$$u_t^2 + u^1 u_1^2 + u^2 u_2^2 + u^3 u_3^2 + \rho_0^{-1} p_2 - \nu(u_{11}^2 + u_{22}^2 + u_{33}^2) = 0, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
u_t^3 + u^1 u_1^3 + u^2 u_2^3 + u^3 u_3^3 + \rho_0^{-1} p_3 - \nu(u_{11}^3 + u_{22}^3 + u_{33}^3) - \\
-g(\beta_T T + \beta_C C) = 0,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$T_t + u^1 T_1 + u^2 T_2 + u^3 T_3 - \chi(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = 0, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} C_t + u^1 C_1 + u^2 C_2 + u^3 C_3 - \mathcal{D}(C_{11} + C_{22} + C_{33}) - \\ - \mathcal{D}_T(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$u_1^1 + u_2^2 + u_3^3 = 0. \quad (3.7)$$

Инфинитезимальный оператор, допускаемый системой, будем искать в виде

$$X = \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \eta^p \frac{\partial}{\partial p} + \eta^T \frac{\partial}{\partial T} + \eta^C \frac{\partial}{\partial C}, \quad (3.8)$$

считая, что его компоненты зависят от всех зависимых и независимых переменных (предполагается суммирование по повторяющемуся индексу  $i = 1, 2, 3$ ). Для формирования определяющих уравнений нужно действовать продолженным оператором  $\overset{2}{X}$  на уравнения (3.2)–(3.7) и перейти на многообразие, задаваемое системой. Однако рассматриваемые уравнения не находятся в инволюции, что затрудняет выделение внешних и внутренних переменных. Добавим к системе ее дифференциальное следствие [287]

$$\begin{aligned} (u_1^1)^2 + (u_2^2)^2 + (u_3^3)^2 + 2(u_2^1 u_1^2 + u_3^1 u_1^3 + u_3^2 u_2^3) + \\ + \rho_0^{-1}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) - g(\beta_T T_3 + \beta_C C_3) = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

получаемое дифференцированием уравнений (3.2), (3.3), (3.4) по  $x^1, x^2, x^3$  соответственно и использованием (3.7). При переходе на многообразие также будем учитывать дифференциальные следствия из уравнения (3.7)

$$u_{t1}^1 + u_{t2}^2 + u_{t3}^3 = 0, \quad u_{1i}^1 + u_{2i}^2 + u_{3i}^3 = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.10)$$

Система (3.2)–(3.7), (3.9), (3.10) находится в инволюции. Теперь нетрудно выделить внешние переменные:  $u_{11}^1, u_{11}^2, u_{11}^3, p_{11}, T_{11}, C_{11}, u_{t3}^3, u_{13}^3, u_{23}^3, u_{33}^3, u_1^1$ . Действуя оператором  $\overset{2}{X}$  на систему и подставляя выражения для внешних переменных в полученные уравнения, приходим к системе определяющих уравнений. После достаточно длинных выкладок ее решение представляется в виде

$$\begin{aligned} \xi^t &= 2c_4 t + c_0, \\ \xi^1 &= c_4 x^1 + c_1 x^2 + c_2 x^3 + f^1(t), \\ \xi^2 &= -c_1 x^1 + c_4 x^2 + c_3 x^3 + f^2(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi^3 &= -c_2x^1 - c_3x^2 + c_4x^3 + f^3(t), \\
\eta^1 &= -c_4u^1 + c_1u^2 + c_2u^3 + f_t^1(t), \\
\eta^2 &= -c_1u^1 - c_4u^2 + c_3u^3 + f_t^2(t), \\
\eta^3 &= -c_2u^1 - c_3u^2 - c_4u^3 + f_t^3(t), \\
\eta^p &= \rho_0((\beta_T c_5 + \beta_C c_6)gx^3 - \\
&\quad - f_{tt}^1(t)x^1 - f_{tt}^2(t)x^2 - f_{tt}^3(t)x^3) - 2c_4p + f^0(t), \\
\eta^T &= c_7T + c_9C + c_5, \\
\eta^C &= c_8C + c_{10}T + c_6.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь  $c_0, \dots, c_{10}$  — групповые константы,  $f^i(t)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  — произвольные гладкие функции. Групповые константы связаны с коэффициентами  $\beta_T$ ,  $\beta_C$ ,  $\chi$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_T$  системой классифицирующих уравнений

$$\begin{aligned}
\beta_T(c_7 + 3c_4) + \beta_C c_{10} &= 0, & \beta_C(c_8 + 3c_4) + \beta_T c_9 &= 0, \\
\mathcal{D}_T(c_8 - c_7) + (\chi - \mathcal{D})c_{10} &= 0, & (\chi - \mathcal{D})c_9 &= 0, \\
\mathcal{D}_T c_9 &= 0, & \beta_T c_2 = \beta_T c_3 = \beta_C c_2 = \beta_C c_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Исходя из формул (3.11) и системы (3.12), выделим алгебры операторов, допускаемые системой в зависимости от значений физических параметров. Результаты групповой классификации представлены в Таблице 3.1. Операторы, указанные в таблице, имеют вид

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_{ij} &= x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i} + u^i \frac{\partial}{\partial u^j} - u^j \frac{\partial}{\partial u^i} \quad (i < j), \\
H_i(f^i(t)) &= f^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} + f_t^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i} - \rho_0 x^i f_{tt}^i(t) \frac{\partial}{\partial p}, & i, j &= 1, 2, 3, \\
H_0(f^0(t)) &= f^0(t) \frac{\partial}{\partial p}, & Z_0 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) - 2p \frac{\partial}{\partial p}, \\
U_T &= \beta_T \rho_0 g x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial T}, & U_C &= \beta_C \rho_0 g x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial C}, \\
T^1 &= T \frac{\partial}{\partial T}, & T^2 &= C \frac{\partial}{\partial T}, & C^1 &= C \frac{\partial}{\partial C}, & C^2 &= T \frac{\partial}{\partial C},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Таблица 3.1. Результаты групповой классификации трехмерной модели.

Основная алгебра			$X_0, X_{12}, H_0, H_1, H_2, H_3, U_T, U_C$	
$\mathcal{D}_T$	$\beta_T$	$\beta_C$	Расширения основной алгебры	$\mathcal{D} = \chi$
0	0	0	$X_{13}, X_{23}, Z_0, T^1, C^1$	$T^2, C^2$
0	0	$\neq 0$	$Z_2, T^1$	$T^2$
0	$\neq 0$	0	$Z_1, C^1$	$C^2$
0	$\neq 0$	$\neq 0$	$Z_3$	$R_1, R_2$
$\neq 0$	0	0	$X_{13}, X_{23}, Z_0, R, L$	
$\neq 0$	0	$\neq 0$	$Z_3$	
$\neq 0$	$\neq 0$	0	$Z_3, L$	
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$Z_3, R_1 (\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_T^*)$	

$$R = T^1 + C^1, \quad R_1 = T^1 - \frac{\beta_T}{\beta_C} C^2, \quad R_2 = C^1 - \frac{\beta_C}{\beta_T} T^2,$$

$$Z_1 = Z_0 - 3T^1, \quad Z_2 = Z_0 - 3C^1, \quad Z_3 = Z_0 - 3T^1 - 3C^1,$$

$$L = (\mathcal{D}_T T + (\mathcal{D} - \chi) C) \frac{\partial}{\partial C}.$$

Основная алгебра Ли, допускаемая системой при любых значениях параметров, образована операторами  $X_0, X_{12}, H_i, H_0, U_T, U_C$ . Возможные расширения этой алгебры также представлены в Таблице 3.1. В первых трех столбцах указаны значения коэффициентов  $\mathcal{D}_T, \beta_T, \beta_C$ , в четвертом — базисные операторы, а в пятом — дополнительные операторы, допускаемые системой в случае равенства коэффициентов диффузии и температуропроводности ( $\mathcal{D} = \chi$ ). В последней строке таблицы оператор  $R_1$  допускается в случае  $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_T^*$ , где  $\mathcal{D}_T^* = \beta_T(\mathcal{D} - \chi)/\beta_C$  и  $\mathcal{D} \neq \chi$ .

Заметим, что в рассмотренной задаче групповой классификации не учитывались преобразования эквивалентности параметров. Это связано с тем, что для построения точных решений и их физической интерпретации в областях

различной геометрии важно знать групповые свойства модели, содержащей все необходимые физические параметры. Группа преобразований эквивалентности будет найдена в пункте 3.1.2.

Преобразования однопараметрических подгрупп, порождаемых допускаемыми операторами (3.13), даются формулами

$$\begin{aligned}
X_0 : \quad & \tilde{t} = t + a; \\
X_{ij} : \quad & \tilde{x}^i = x^i \cos a - x^j \sin a, \quad \tilde{x}^j = x^i \sin a + x^j \cos a, \\
& \tilde{u}^i = u^i \cos a - u^j \sin a, \quad \tilde{u}^j = u^i \sin a + u^j \cos a; \\
H_i(f^i(t)) : \quad & \tilde{x}^i = x^i + af^i(t), \quad \tilde{u}^i = u^i + af_t^i(t), \\
& \tilde{p} = p - a\rho_0 f_{tt}^i(t) (x^i + af^i(t)/2); \\
H_0(f^0(t)) : \quad & \tilde{p} = p + af^0(t); \\
Z_0 : \quad & \tilde{t} = e^{2a}t, \quad \tilde{x}^i = e^a x^i, \quad \tilde{u}^i = e^{-a} u^i, \quad \tilde{p} = e^{-2a} p; \\
U_T : \quad & \tilde{p} = p + a\beta_T \rho_0 g x^3, \quad \tilde{T} = T + a; \\
U_C : \quad & \tilde{p} = p + a\beta_C \rho_0 g x^3, \quad \tilde{C} = C + a; \\
T^1 : \quad & \tilde{T} = e^a T; \quad T^2 : \quad \tilde{T} = T + aC; \\
C^1 : \quad & \tilde{C} = e^a C; \quad C^2 : \quad \tilde{C} = C + aT; \\
R : \quad & \tilde{T} = e^a T, \quad \tilde{C} = e^a C; \\
R_1 : \quad & \tilde{T} = e^a T, \quad \tilde{C} = C + \beta_T \beta_C^{-1} (1 - e^a) T; \\
R_2 : \quad & \tilde{C} = e^a C, \quad \tilde{T} = T + \beta_C \beta_T^{-1} (1 - e^a) C; \\
L : \quad & \tilde{C} = (C + \frac{\mathcal{D}_T}{\mathcal{D} - \chi} T) e^{(\mathcal{D} - \chi)a} - \frac{\mathcal{D}_T}{\mathcal{D} - \chi} T.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Переменные, закон преобразования которых не указан, преобразуются тождественно. В формулах (3.14)  $a$  есть вещественный параметр однопараметрической подгруппы, свой для каждого оператора. Преобразования, порождаемые операторами  $Z_1, Z_2, Z_3$ , получаются расширением однопараметрической подгруппы, соответствующей оператору  $Z$ , указанными ниже преобразованиями:

$$Z_1 : \quad \tilde{T} = e^{-3a} T; \quad Z_2 : \quad \tilde{C} = e^{-3a} C;$$

$$Z_3 : \quad \tilde{T} = e^{-3a} T, \quad \tilde{C} = e^{-3a} C.$$

Заметим, что операторы  $U_i, T^i, C^i, R, R_i, Z_i, L$  являются специфичными для уравнений конвекции бинарной смеси с учетом термодиффузии в отличие от операторов  $X_0, X_{ij}, H_i, H_0$ , которые допускаются многими моделями гидродинамики.

Выясним, какими дискретными симметриями обладают уравнения движения бинарной смеси. В классе таких симметрий ограничимся преобразованиями отражения, задаваемыми формулами

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= (-1)^{\alpha_0} t, & \tilde{x}^i &= (-1)^{\alpha_i} x^i, & \tilde{u}^i &= (-1)^{\gamma_i} u^i, & i &= 1, 2, 3, \\ \tilde{p} &= (-1)^{\gamma_4} p, & \tilde{T} &= (-1)^{\gamma_5} T, & \tilde{C} &= (-1)^{\gamma_6} C, \end{aligned}$$

где  $\alpha_0, \dots, \alpha_3, \gamma_1, \dots, \gamma_6 \in \{0, 1\}$ . Подставим преобразованные переменные в уравнения (3.2)–(3.7). Умножая уравнение (3.2) на  $(-1)^{\gamma_1}$ , получим

$$\begin{aligned} (-1)^{\alpha_0} u_t^1 + (-1)^{\alpha_1 + \gamma_1} u^1 u_1^1 + (-1)^{\alpha_2 + \gamma_2} u^2 u_2^1 + (-1)^{\alpha_3 + \gamma_3} u^3 u_3^1 &= \\ = -(-1)^{\alpha_1 + \gamma_1 + \gamma_4} \rho_0^{-1} p_1 + \nu(u_{11}^1 + u_{22}^1 + u_{33}^1). \end{aligned}$$

Данное уравнение остается неизменным, если все показатели степени  $(-1)$  равны нулю. Применяя аналогичную процедуру к остальным уравнениям, найдем условия инвариантности системы относительно преобразований отражения:

$$\alpha_0 = \alpha_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \gamma_2 = \alpha_3 + \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_3 + \gamma_5 = \gamma_3 + \gamma_6 = 0.$$

Так как полученная система содержит семь уравнений относительно десяти неизвестных, постоянные  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  можно считать произвольными. Последовательно полагая одну из них равной единице, а остальные равными нулю, найдем допускаемые отражения:

$$\begin{aligned} d_1 : \quad \tilde{x}^1 &= -x^1, \quad \tilde{u}^1 = -u^1; & d_2 : \quad \tilde{x}^2 &= -x^2, \quad \tilde{u}^2 = -u^2; \\ d_3 : \quad \tilde{x}^3 &= -x^3, \quad \tilde{u}^3 = -u^3, \quad \tilde{T} = -T, \quad \tilde{C} = -C. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Заметим, что преобразование  $d_3$  имеет физический смысл, так как переменные  $T$  и  $C$  являются отклонениями от средних значений температуры и концентрации и могут быть отрицательными.

### 3.1.2 Преобразования эквивалентности

Прежде, чем перейти к нахождению преобразований эквивалентности для уравнений движения бинарной смеси, установим один полезный факт. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, задаваемую равенством

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{c}) = 0. \quad (3.16)$$

Здесь  $\mathbf{x}$  — вектор независимых переменных,  $\mathbf{u}$  — вектор зависимых переменных,  $\mathbf{u}_s$  — совокупность производных от  $\mathbf{u}$  по  $\mathbf{x}$  порядка  $s = 1, \dots, k$ ,  $\mathbf{c}$  — вектор параметров (констант). Пусть  $X$  — инфинитезимальный оператор вида

$$X = \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}}.$$

Если система (3.16) допускает оператор  $X$ , то этот оператор порождает однопараметрическую группу преобразований эквивалентности данной системы. Так как при преобразованиях эквивалентности константы должны переходить в константы, то компоненты оператора  $X$  есть вектор-функции вида  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c})$ ,  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c})$ ,  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c})$ . Справедливо следующее утверждение, впервые установленное в работе [71]:

**Утверждение 3.1.** Если система (3.16) допускает оператор  $X$ , то эта система также допускает оператор  $FX$  с произвольной функцией  $F = F(\mathbf{c})$ .

Отсюда следует, что оператор группы преобразований эквивалентности констант определен с точностью до множителя, произвольным образом зависящего от этих констант.

Перейдем к вычислению преобразований эквивалентности для уравнений конвекции бинарной смеси (3.1). Инфинитезимальный оператор группы будем искать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{X} = & X + \eta^{\beta_T} \frac{\partial}{\partial \beta_T} + \eta^{\beta_C} \frac{\partial}{\partial \beta_C} + \eta^\chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \\ & + \eta^D \frac{\partial}{\partial D} + \eta^{D_T} \frac{\partial}{\partial D_T} + \eta^{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \rho_0} + \eta^\nu \frac{\partial}{\partial \nu} + \eta^g \frac{\partial}{\partial g}, \end{aligned}$$

предполагая, что его компоненты зависят от всех зависимых и независимых переменных, а также параметров, входящих в систему (здесь  $X$  есть оператор

вида (3.8)). Заметим, что к уравнениям (3.2)–(3.7), (3.9), (3.10) необходимо добавить условия равенства нулю производных от  $\beta_T$ ,  $\beta_C$ ,  $\chi$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_T$ ,  $\rho_0$ ,  $\nu$ ,  $g$  по переменным  $t, x^i, u^i, p, T, C$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Компоненты продолженного оператора  $\tilde{X}_2$  вычисляются по формулам, выведенным в [288]. Действуя продолженным оператором на систему и переходя на соответствующее многообразие, получим определяющие уравнения. Из этих уравнений следует, что компоненты оператора  $\tilde{X}$ , соответствующие параметрам, не зависят от переменных  $t, x^i, u^i, p, T, C$ . Решение определяющих уравнений дается формулами

$$\begin{aligned}\xi^t &= (2c_4 + \eta^\nu \nu^{-1})t + c_0, \\ \xi^1 &= (c_4 + \eta^\nu \nu^{-1})x^1 + c_1x^2 + c_2x^3 + f^1(t), \\ \xi^2 &= -c_1x^1 + (c_4 + \eta^\nu \nu^{-1})x^2 + c_3x^3 + f^2(t), \\ \xi^3 &= -c_2x^1 - c_3x^2 + (c_4 + \eta^\nu \nu^{-1})x^3 + f^3(t), \\ \eta^1 &= -c_4u^1 + c_1u^2 + c_2u^3 + f_t^1(t), \\ \eta^2 &= -c_1u^1 - c_4u^2 + c_3u^3 + f_t^2(t), \\ \eta^3 &= -c_2u^1 - c_3u^2 - c_4u^3 + f_t^3(t), \\ \eta^p &= \rho_0((\beta_T c_5 + \beta_C c_6)gx^3 - f_{tt}^1(t)x^1 - f_{tt}^2(t)x^2 - f_{tt}^3(t)x^3) + \\ &\quad + (\eta^{\rho_0} \rho_0^{-1} - 2c_4)p + f^0(t), \\ \eta^T &= c_7T + c_9C + c_5, \\ \eta^C &= c_8C + c_{10}T + c_6, \\ \eta^{\beta_T} &= -(3c_4 + c_7 + \eta^\nu \nu^{-1} + \eta^g g^{-1})\beta_T - c_{10}\beta_C, \\ \eta^{\beta_C} &= -(3c_4 + c_8 + \eta^\nu \nu^{-1} + \eta^g g^{-1})\beta_C - c_9\beta_T, \\ \eta^\chi &= \chi \eta^\nu \nu^{-1}, \\ \eta^{\mathcal{D}} &= \mathcal{D} \eta^\nu \nu^{-1}, \\ \eta^{\mathcal{D}_T} &= (c_8 - c_7)\mathcal{D}_T + c_{10}(\chi - \mathcal{D}) + \mathcal{D}_T \eta^\nu \nu^{-1},\end{aligned}$$

при этом должны выполняться условия

$$(\chi - \mathcal{D})c_9 = \mathcal{D}_T c_9 = 0, \quad \beta_T c_2 = \beta_T c_3 = \beta_C c_2 = \beta_C c_3 = 0. \quad (3.17)$$

В приведенных формулах величины  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$ , а также компоненты  $\eta^{\rho_0}$ ,  $\eta^\nu$ ,  $\eta^g$  являются произвольными функциями параметров  $\beta_T$ ,  $\beta_C$ ,  $\chi$ ,  $\mathcal{D}$ ,

$\mathcal{D}_T$ ,  $\rho_0$ ,  $\nu$ ,  $g$ . Кроме этого, функции  $f^i(t)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  также произвольным образом зависят от этих параметров. Согласно Утверждению 3.1, без ограничения общности можно считать величины  $c_i$  постоянными, а неопределенные компоненты инфинитезимального оператора выбрать следующим образом:  $\eta^\nu = c_{11}\nu$ ,  $\eta^{\rho_0} = c_{12}\rho_0$ ,  $\eta^g = c_{13}g$ , где  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{13}$  — произвольные постоянные. Далее, константу  $c_4$  можно исключить из выражений для  $\eta^{\beta_T}$ ,  $\eta^{\beta_C}$  путем введения новых констант  $\tilde{c}_7 = 3c_4 + c_7$ ,  $\tilde{c}_8 = 3c_4 + c_8$ . Тогда операторы, порождающие однопараметрические группы преобразований эквивалентности параметров, записываются так:

$$\begin{aligned} E_1 &= T \frac{\partial}{\partial T} - \beta_T \frac{\partial}{\partial \beta_T} - \mathcal{D}_T \frac{\partial}{\partial \mathcal{D}_T}, & E_2 &= C \frac{\partial}{\partial C} - \beta_C \frac{\partial}{\partial \beta_C} + \mathcal{D}_T \frac{\partial}{\partial \mathcal{D}_T}, \\ E_3 &= C \frac{\partial}{\partial T} - \beta_T \frac{\partial}{\partial \beta_C}, & E_4 &= T \frac{\partial}{\partial C} - \beta_C \frac{\partial}{\partial \beta_T} + (\chi - \mathcal{D}) \frac{\partial}{\partial \mathcal{D}_T}, \\ E_5 &= t \frac{\partial}{\partial t} + x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \beta_T \frac{\partial}{\partial \beta_T} - \beta_C \frac{\partial}{\partial \beta_C} + \nu \frac{\partial}{\partial \nu} + \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial \mathcal{D}} + \mathcal{D}_T \frac{\partial}{\partial \mathcal{D}_T}, \\ E_6 &= p \frac{\partial}{\partial p} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}, & E_7 &= \beta_T \frac{\partial}{\partial \beta_T} + \beta_C \frac{\partial}{\partial \beta_C} - g \frac{\partial}{\partial g}. \end{aligned}$$

Преобразования эквивалентности, порождаемые этими операторами, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} E_1 : \quad &\tilde{\beta}_T = e_1 \beta_T, \quad \tilde{\mathcal{D}}_T = e_1 \mathcal{D}_T; \\ E_2 : \quad &\tilde{\beta}_C = e_2 \beta_C, \quad \tilde{\mathcal{D}}_T = e_2^{-1} \mathcal{D}_T; \\ E_3 : \quad &\tilde{\beta}_C = \beta_C - e_3 \beta_T; \\ E_4 : \quad &\tilde{\beta}_T = \beta_T - e_4 \beta_C, \quad \tilde{\mathcal{D}}_T = \mathcal{D}_T + e_4(\chi - \mathcal{D}); \\ E_5 : \quad &\tilde{\beta}_T = e_5 \beta_T, \quad \tilde{\beta}_C = e_5 \beta_C, \quad \tilde{\nu} = e_5^{-1} \nu, \\ &\tilde{\chi} = e_5^{-1} \chi, \quad \tilde{\mathcal{D}} = e_5^{-1} \mathcal{D}, \quad \tilde{\mathcal{D}}_T = e_5^{-1} \mathcal{D}_T; \\ E_6 : \quad &\tilde{\rho}_0 = e_6 \rho_0; \\ E_7 : \quad &\tilde{\beta}_T = e_7 \beta_T, \quad \tilde{\beta}_C = e_7 \beta_C, \quad \tilde{g} = e_7^{-1} g. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Здесь  $e_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 5, 6, 7$ ,  $e_3, e_4 \in \mathbb{R}$  — групповые параметры преобразований эквивалентности. Согласно условиям (3.17), оператор  $E_3$  (и соответству-

ющее преобразование) допускается только в случае  $\mathcal{D}_T = 0$ ,  $\mathcal{D} = \chi$ .

В дополнение к непрерывным преобразованиям эквивалентности вычислим дискретные преобразования отражения параметров. Действуя по схеме, описанной в пункте 3.1.1, найдем, что отражения (3.15) дополняются следующими преобразованиями:

$$\begin{aligned} d_4 : \quad & \tilde{t} = -t, \quad \tilde{u}^i = -u^i, \quad \tilde{\nu} = -\nu, \\ & \tilde{\chi} = -\chi, \quad \tilde{\mathcal{D}} = -\mathcal{D}, \quad \tilde{\mathcal{D}}_T = -\mathcal{D}_T; \\ d_5 : \quad & \tilde{p} = -p, \quad \tilde{\rho}_0 = -\rho_0; \\ d_6 : \quad & \tilde{\beta}_T = -\beta_T, \quad \tilde{\beta}_C = -\beta_C, \quad \tilde{g} = -g; \\ d_7 : \quad & \tilde{T} = -T, \quad \tilde{\beta}_T = -\beta_T, \quad \tilde{\mathcal{D}}_T = -\mathcal{D}_T; \\ d_8 : \quad & \tilde{C} = -C, \quad \tilde{\beta}_C = -\beta_C, \quad \tilde{\mathcal{D}}_T = -\mathcal{D}_T. \end{aligned}$$

Заметим, что преобразования  $d_4$  и  $d_5$  не имеют физического смысла в силу положительности коэффициентов переноса  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $\mathcal{D}$  и величин  $p$ ,  $\rho_0$ .

Найденные преобразования эквивалентности могут быть использованы для упрощения уравнений (3.1) при решении задачи групповой классификации. Классификация уравнений с учетом преобразований эквивалентности была выполнена в [69]. Эти результаты здесь не приводятся. Заметим, что групповая классификация, выполненная в пункте 3.1.1, является более удобной с точки зрения построения точных решений и их физической интерпретации. Использование преобразований эквивалентности представляется более оправданным в случае, когда уравнения содержат произвольные функции, а не константы. Групповая классификация уравнений конвекции бинарной смеси с учетом эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности (переноса тепла под действием градиента концентрации) была впервые проведена в работе [71]. Задача групповой классификации уравнений движения бинарной смеси с физическими свойствами, зависящими от температуры и концентрации, была решена в более поздней работе [289].

Отметим полезное свойство преобразования, задаваемого оператором  $E_4$ , см. (3.18). Если  $\mathcal{D} \neq \chi$ , то полагая  $e_4 = \mathcal{D}_T(\mathcal{D} - \chi)^{-1}$ , будем иметь  $\tilde{\mathcal{D}}_T = 0$ .

Таким образом, с помощью данного преобразования можно исключить член  $\mathcal{D}_T \nabla^2 T$  из предпоследнего уравнения в (3.1), которое описывает перенос массы выбранного компонента смеси. Данный член характеризует эффект термодиффузии. Преобразование эквивалентности  $E_4$  соответствует переходу к новой концентрации  $\tilde{C}$  согласно формуле

$$\tilde{C} = C + \frac{\mathcal{D}_T}{\mathcal{D} - \chi} T. \quad (3.19)$$

В этом случае выражение для потока массы (2.1) принимает вид

$$\mathcal{J} = -\rho_0 \left( \mathcal{D} \nabla \tilde{C} + \frac{\mathcal{D}_T \chi}{\chi - \mathcal{D}} \nabla T \right). \quad (3.20)$$

Заметим, что несмотря на исключение члена, характеризующего термодиффузию, из уравнений движения, этот член не всегда может быть исключен из граничных условий рассматриваемой задачи. В частности, если граница области  $\partial\Omega$  с вектором нормали  $\mathbf{n}$  является непроницаемой, то на ней должно быть выполнено условие

$$\mathcal{J} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Из (3.20) следует, что преобразование  $E_4$  не позволяет исключить член, пропорциональный градиенту температуры, из указанного граничного условия.

### 3.1.3 Структура допускаемой алгебры операторов

Знание групповых свойств уравнений позволяет строить решения, инвариантные относительно подгрупп допускаемой группы преобразований. Как было указано в параграфе 1.5, задача перечисления всех существенно различных инвариантных решений сводится к построению оптимальной системы подалгебр для допускаемой алгебры Ли операторов.

Рассмотрим уравнения движения бинарной смеси (3.1) в случае, когда коэффициенты  $\beta_T$ ,  $\beta_C$ ,  $\mathcal{D}_T$  отличны от нуля (таким образом, учитывается линейная зависимость плотности от температуры и концентрации и эффект термодиффузии). Как видно из Таблицы 3.1, в этом случае система допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов  $L$ . Для удобства дальнейших

вычислений вводятся новые обозначения операторов. Алгебру  $L$  можно представить в виде полупрямой суммы  $L = L^5 \oplus L^\infty$ , где конечномерная подалгебра  $L^5$  образована операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_2 &= \rho_0 g x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{\beta_C} \frac{\partial}{\partial C}, & X_3 &= \rho_0 g x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{\beta_T} \frac{\partial}{\partial T}, \\ X_4 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) - 2p \frac{\partial}{\partial p} - 3T \frac{\partial}{\partial T} - 3C \frac{\partial}{\partial C}, \\ X_5 &= x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^2} - u^2 \frac{\partial}{\partial u^1}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

а бесконечномерный идеал  $L^\infty$  имеет базис

$$\begin{aligned} H_i(f^i(t)) &= f^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} + f_t^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i} - \rho_0 x^i f_{tt}^i(t) \frac{\partial}{\partial p}, \quad i = 1, 2, 3, \\ H_0(f^0(t)) &= f^0(t) \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Если коэффициент термодиффузии связан с другими параметрами соотношением  $\mathcal{D}_T = \beta_T(\mathcal{D} - \chi)/\beta_C$ ,  $\mathcal{D} \neq \chi$ , то система также инвариантна относительно оператора

$$R_1 = T \frac{\partial}{\partial T} - \frac{\beta_T}{\beta_C} T \frac{\partial}{\partial C}.$$

В дальнейшем этот частный случай не рассматривается.

Для построения оптимальной системы подалгебр необходимо выяснить структуру алгебры  $L$  и найти группу ее внутренних автоморфизмов, которая будет обозначаться  $\text{Int } L$ . Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{f}(t) = (f^1(t), f^2(t), f^3(t)), \quad f^0 = f^0(t)$$

— произвольные гладкие функции,

$$H(\mathbf{f}) = H_1(f^1) + H_2(f^2) + H_3(f^3), \quad H_0(f^0)$$

— операторы алгебры  $L^\infty$ . Функции  $\mathbf{g}(t)$ ,  $g^0(t)$ ,  $\mathbf{h}(t)$ ,  $h^0(t)$  вводятся аналогичным образом. В этих обозначениях вычисляются коммутаторы базисных операторов алгебры Ли  $L$ , которые представлены в Таблице 3.2.

Образ  $\tilde{X}$  базисного оператора  $X$  под действием внутреннего автоморфизма, соответствующего базисному оператору  $Y$ , ищется как решение задачи

Таблица 3.2. Коммутаторы базисных операторов алгебры  $L$ .

$[\downarrow, \rightarrow]$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$H(\mathbf{g})$	$H_0(g^0)$
						$H(\mathbf{g}_t)$	$H_0(g_t^0)$
$X_1$	0	0	0	$2X_1$	0	$H(\mathbf{g}_t)$	$H_0(g_t^0)$
$X_2$	0	0	0	$-3X_2$	0	$H_0(-\rho_0 gg^3)$	0
$X_3$	0	0	0	$-3X_3$	0	$H_0(-\rho_0 gg^3)$	0
$X_4$	$-2X_1$	$3X_2$	$3X_3$	0	0	$H(2t\mathbf{g}_t - \mathbf{g})$	$2H_0(tg_t^0 + g^0)$
$X_5$	0	0	0	0	0	$H(g^2, -g^1, 0)$	0
$H(\mathbf{f})$	$H(-\mathbf{f}_t)$	$H_0(\rho_0 gf^3)$	$H_0(\rho_0 gf^3)$	$H(-2t\mathbf{f}_t + \mathbf{f})$	$H(-f^2, f^1, 0)$	$\rho_0 H_0(\mathbf{f}_{tt} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}_{tt})$	0
$H_0(f^0)$	$H_0(-f_t^0)$	0	0	$-2H_0(tf_t^0 + f^0)$	0	0	0

Таблица 3.3. Действие внутренних автоморфизмов алгебры  $L$ .

	$\tilde{k}^1$	$\tilde{k}^2$	$\tilde{k}^3$	$\tilde{k}^4$	$\tilde{k}^5$	$\tilde{\mathbf{f}}(t)$	$\tilde{f}^0(t)$
$A_1(a_1)$	$k^1 - 2a_1k^4$	$k^2$	$k^3$	$k^4$	$k^5$	$\mathbf{f}(t - a_1)$	$f^0(t - a_1)$
$A_2(a_2)$	$k^1$	$k^2 + 3a_2k^4$	$k^3$	$k^4$	$k^5$	$\mathbf{f}(t)$	$f^0(t) + a_2\rho_0 g f^3(t)$
$A_3(a_3)$	$k^1$	$k^2$	$k^3 + 3a_3k^4$	$k^4$	$k^5$	$\mathbf{f}(t)$	$f^0(t) + a_3\rho_0 g f^3(t)$
$A_4(a_4)$	$e^{2a_4}k^1$	$e^{-3a_4}k^2$	$e^{-3a_4}k^3$	$k^4$	$k^5$	$e^{a_4}\mathbf{f}(e^{-2a_4}t)$	$e^{-2a_4}f^0(e^{-2a_4}t)$
$A_5(a_5)$	$k^1$	$k^2$	$k^3$	$k^4$	$k^5$	$R(a_5)\mathbf{f}(t)$	$f^0(t)$
$A^H(\mathbf{h})$	$k^1$	$k^2$	$k^3$	$k^4$	$k^5$	$\mathbf{f}(t) + \mathbf{q}(t)$	$f^0(t) + q^0(t)$
$A_0^H(h^0)$	$k^1$	$k^2$	$k^3$	$k^4$	$k^5$	$\mathbf{f}(t)$	$f^0(t) + p^0(t)$
$A_1^d(\delta_1)$	$k^1$	$k^2$	$k^3$	$k^4$	$(-1)^{\delta_1}k^5$	$D(\delta_1, 0, 0)\mathbf{f}(t)$	$f^0(t)$
$A_2^d(\delta_2)$	$k^1$	$k^2$	$k^3$	$k^4$	$(-1)^{\delta_2}k^5$	$D(0, \delta_2, 0)\mathbf{f}(t)$	$f^0(t)$
$A_3^d(\delta_3)$	$k^1$	$(-1)^{\delta_3}k^2$	$(-1)^{\delta_3}k^3$	$k^4$	$k^5$	$D(0, 0, \delta_3)\mathbf{f}(t)$	$f^0(t)$

Коши

$$\frac{d\tilde{X}}{da} = [\tilde{X}, Y], \quad \tilde{X}(0) = X, \quad (3.23)$$

или используется явная формула

$$\tilde{X} = A_Y(a) < X > = X + \frac{a}{1!}[X, Y] + \frac{a^2}{2!}[[X, Y], Y] + \dots . \quad (3.24)$$

Группу  $\text{Int}L$  образуют автоморфизмы  $A_i(a_i)$ ,  $A^H(\mathbf{h})$ ,  $A_0^H(h^0)$ , соответствующие базисным операторам  $X_i$ ,  $H(\mathbf{f})$ ,  $H_0(f^0)$ . Здесь  $i = 1, \dots, 5$  и  $a_i$ ,  $\mathbf{h}(t)$ ,  $h^0(t)$  — параметры. Рассмотрим оператор общего вида

$$X = \sum_{i=1}^5 k^i X_i + H(\mathbf{f}) + H_0(f^0),$$

где  $(k^1, \dots, k^5, \mathbf{f}(t), f^0(t))$  — координаты оператора  $X \in L$  в базисе (3.21), (3.22). Группа внутренних автоморфизмов преобразует координаты оператора  $X$  по формуле

$$\text{Int}L : (k^1, \dots, k^5, \mathbf{f}(t), f^0(t)) \longrightarrow (\tilde{k}^1, \dots, \tilde{k}^5, \tilde{\mathbf{f}}(t), \tilde{f}^0(t)).$$

Действие группы  $\text{Int}L$  приведено в Таблице 3.3, при этом используются следующие обозначения:

$$R(a_5) = \begin{pmatrix} \cos a_5 & -\sin a_5 & 0 \\ \sin a_5 & \cos a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = \begin{pmatrix} (-1)^{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\delta_2} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\delta_3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} q^0(t) &= \rho_0(\mathbf{f}_{tt} \cdot \mathbf{h} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{h}_{tt} + k^1/2(\mathbf{h}_{ttt} \cdot \mathbf{h} - \mathbf{h}_t \cdot \mathbf{h}_{tt}) - (k^2 + k^3)gh^3 + \\ &\quad + k^4(2\mathbf{h}_{tt} \cdot \mathbf{h} + t\mathbf{h}_{ttt} \cdot \mathbf{h} - t\mathbf{h}_{tt} \cdot \mathbf{h}_t) + k^5(h^1h_{tt}^2 - h_{tt}^1h^2)), \\ \mathbf{q}(t) &= k^1\mathbf{h}_t + k^4(2t\mathbf{h}_t - \mathbf{h}) + k^5(h^2, -h^1, 0), \\ p^0(t) &= k^1h_t^0 + k^4(2th_t^0 + 2h^0). \end{aligned} \quad (3.25)$$

В таблице также указано действие дискретных автоморфизмов  $A_i^d(\delta_i)$ , порождаемых дискретными симметриями  $d_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (см. (3.15)). Параметры  $\delta_i$  принимают значения  $\{0, 1\}$ , при этом  $A_i^d(0)$  соответствует тождественному преобразованию.

**Замечание.** Для определения действия автоморфизмов  $A_1(a_1)$  и  $A_4(a_4)$  на операторы  $H(\mathbf{f})$  и  $H_0(f^0)$  строилось решение задачи (3.23). Во всех остальных случаях использовалась формула (3.24).

### 3.1.4 Оптимальные системы подалгебр

Перейдем к построению оптимальной системы  $\Theta L$  для алгебры Ли операторов  $L = L^5 \oplus L^\infty$ , допускаемой уравнениями конвекции бинарной смеси [64, 66]. Алгебра  $L^5$  представима в виде прямой суммы  $L^5 = L^4 \oplus \{X_5\}$  подалгебры  $L^4 = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$  и своего центра  $\{X_5\}$ . Далее, для алгебры  $L^4$  справедливо разложение в полупрямую сумму  $L^4 = J \oplus N$  собственного идеала  $J = \{X_1, X_2\}$  и подалгебры  $N = \{X_3, X_4\}$ . Указанные разложения позволяют осуществить построение оптимальных систем подалгебр в следующем порядке:  $\Theta N \rightarrow \Theta L^4 \rightarrow \Theta L^5 \rightarrow \Theta L$ . Детали построения можно найти в [69].

Оптимальная система  $\Theta N$  состоит из четырех подалгебр

$$\{X_3, X_4\}, \quad \{X_3\}, \quad \{X_4\}, \quad \{0\}.$$

Здесь в скобках указаны базисные операторы каждой подалгебры.

Оптимальная система  $\Theta L^4$  приведена в Таблице 3.4. В первом столбце указан номер подалгебры, который имеет вид  $p.q$ , где  $p$  — размерность подалгебры,  $q$  — порядковый номер подалгебры размерности  $p$ . Во втором столбце приводятся базисы подалгебр, которые записаны символически номерами соответствующих операторов. Символ  $\lambda 2 + 3$  означает  $\lambda X_2 + X_3$  и т. д. Постоянная  $\lambda$  принимает любые вещественные значения. В третьем столбце указан номер нормализатора подалгебры в  $L^4$ , знаком равенства отмечены самонормализованные подалгебры (нормализатором подалгебры  $S$  в алгебре  $L$  называется множество операторов  $X \in L$ , таких, что коммутатор  $[X, Y] \in S$  для любого оператора  $Y \in S$ ).

Оптимальная система  $\Theta L^5$  приводится в Таблице 3.5. Здесь постоянная  $\lambda$  также принимает любые вещественные значения, а постоянная  $\mu \geq 0$ .

Перейдем к построению оптимальной системы подалгебр  $\Theta L$ . Заметим, что задача построения оптимальных систем для бесконечномерных алгебр Ли

Таблица 3.4. Оптимальная система подалгебр  $\Theta L^4$ .

$p \cdot q$	Базис $R^{pq}$	$\text{Nor}R^{pq}$	$p \cdot q$	Базис $R^{pq}$	$\text{Nor}R^{pq}$
4.1	1, 2, 3, 4	=4.1	2.6	1, 4	=2.6
3.1	1, 2, 3	4.1	2.7	2, 4	=2.7
3.2	1, 2, 4	=3.2	2.8	$\lambda 2 + 3, 4$	=2.8
3.3	2, 3, 4	=3.3	1.1	1	4.1
3.4	1, $\lambda 2 + 3, 4$	=3.4	1.2	2	4.1
2.1	1, 2	4.1	1.3	$\lambda 2 + 3$	4.1
2.2	2, 3	4.1	1.4	$1 + 2$	3.1
2.3	1, $\lambda 2 + 3$	4.1	1.5	$1 + \lambda 2 + 3$	3.1
2.4	$1 + 2, \lambda 1 + 3$	3.1	1.6	4	=1.6
2.5	$1 + 3, 2$	3.1	0.1	0	4.1

еще не получила окончательного решения. В связи с этим ограничимся построением оптимальной системы подалгебр первого порядка  $\Theta_1 L$  (т.е. подалгебр размерности 1). Нахождение этой системы сводится к классификации подалгебр из двух классов:

- 1)  $\{H(\mathbf{f}) + H_0(f^0)\},$
- 2)  $\{K_i + H(\mathbf{f}) + H_0(f^0)\},$

где  $\{K_i\} \in \Theta_1 L^5, i = 1, \dots, 10$ . Первый класс лежит в идеале  $L^\infty$ , а второй класс имеет нулевое пересечение с идеалом  $L^\infty$ .

Оптимальная система  $\Theta_1 L$  приведена в Таблице 3.6. В третьем столбце указаны специальные преобразования произвольных функций  $\mathbf{f}, f^0$ . Дело в том, что полученные в результате классификации подалгебры, базис которых зависит от произвольных функций, могут содержать подобные подалгебры. Например, подалгебру  $\{X_5 + H_0(f^0)\}$  последовательным действием автоморфизмов  $A_1(a_1)$ ,  $A_4(a_4)$  и  $A_1^d(\delta_1)$  (см. Таблицу 3.3) и линейным преобразованием базиса можно привести к виду  $\{X_5 + H_0(\tilde{f}^0)\}$ , где

$$\tilde{f}^0(t) = (-1)^{\delta_1} e^{-2a_4} f^0(e^{-2a_4}(t - a_1)), \quad (3.26)$$

Таблица 3.5. Оптимальная система подалгебр  $\Theta L^5$ .

$p \cdot q$	Базис $K^{pq}$	$\text{Nor}K^{pq}$	$p \cdot q$	Базис $K^{pq}$	$\text{Nor}K^{pq}$
5.1	1, 2, 3, 4, 5	=5.1	2.7	1 + 2, 5	4.1
4.1	1, 2, 3, 5	5.1	2.8	1 + $\lambda$ 2 + 3, 5	4.1
4.2	1, 2, 3, 4 + $\mu$ 5, $\mu \geq 0$	5.1	2.9	1 + 5, 2	4.1
4.3	1, 2, 4, 5	=4.3	2.10	1, 2 + 5	4.1
4.4	1, $\lambda$ 2 + 3, 4, 5	=4.4	2.11	1 + 5, $\lambda$ 2 + 3	4.1
4.5	2, 3, 4, 5	=4.5	2.12	1, $\lambda$ 2 + 3 + 5	4.1
3.1	1, 2, 3	5.1	2.13	2 + 5, 3	4.1
3.2	1, 2, 5	5.1	2.14	2, 3 + 5	4.1
3.3	1, $\lambda$ 2 + 3, 5	5.1	2.15	1 + 2 + $\mu$ 5, $\lambda$ 1 + 3, $\mu \geq 0$	4.1
3.4	2, 3, 5	5.1	2.16	1 + 2, $\lambda$ 1 + 3 + $\mu$ 5, $\mu > 0$	4.1
3.5	1 + 5, 2, 3	4.1	2.17	1 + 3 + $\mu$ 5, 2, $\mu \geq 0$	4.1
3.6	1, 2 + 5, 3	4.1	2.18	1 + 3, 2 + $\mu$ 5, $\mu > 0$	4.1
3.7	1, 2, 3 + 5	4.1	2.19	1, 4 + $\mu$ 5, $\mu \geq 0$	3.13
3.8	1 + 2, $\lambda$ 1 + 3, 5	4.1	2.20	2, 4 + $\mu$ 5, $\mu \geq 0$	3.14
3.9	1 + 3, 2, 5	4.1	2.21	$\lambda$ 2 + 3, 4 + $\mu$ 5, $\mu \geq 0$	3.15
3.10	1, 2, 4 + $\mu$ 5, $\mu \geq 0$	4.3	2.22	4, 5	=2.22
3.11	1, $\lambda$ 2 + 3, 4 + $\mu$ 5, $\mu \geq 0$	4.4	1.1	1	5.1
3.12	2, 3, 4 + $\mu$ 5, $\mu \geq 0$	4.5	1.2	2	5.1
3.13	1, 4, 5	=3.13	1.3	$\lambda$ 2 + 3	5.1
3.14	2, 4, 5	=3.14	1.4	5	5.1
3.15	$\lambda$ 2 + 3, 4, 5	=3.15	1.5	1 + 5	4.1
2.1	1, 2	5.1	1.6	1 + 2 + $\mu$ 5, $\mu \geq 0$	4.1
2.2	1, $\lambda$ 2 + 3	5.1	1.7	1 + $\lambda$ 2 + 3 + $\mu$ 5, $\mu \geq 0$	4.1
2.3	1, 5	5.1	1.8	2 + 5	4.1
2.4	2, 3	5.1	1.9	$\lambda$ 2 + 3 + 5	4.1
2.5	2, 5	5.1	1.10	4 + $\mu$ 5, $\mu \geq 0$	2.22
2.6	$\lambda$ 2 + 3, 5	5.1	0.1	0	5.1

Таблица 3.6. Оптимальная система подалгебр  $\Theta_1 L$ . В подалгебрах 7, 8, 9 предполагается, что  $f^0 \not\equiv 0$ .

$i$	Базис	Преобразование подобия
1	$X_1$	
2	$X_1 + X_5$	
3	$X_4 + \mu X_5, \mu \geq 0$	
4	$X_1 + X_2 + \mu X_5, \mu \geq 0$	
5	$X_1 + \lambda X_2 + X_3 + \mu X_5, \mu \geq 0$	
6	$H_0(f^0)$	$\tilde{f}^0(t) = cf^0(at + b)$
7	$X_5 + H_0(f^0)$	$\tilde{f}^0(t) = (-1)^\delta af^0(at + b)$
8	$X_2 - X_3 + H_0(f^0)$	$\tilde{f}^0(t) = (-1)^\delta a^{-1/2} f^0(at + b)$
9	$X_2 - X_3 + X_5 + H_0(f^0)$	$\tilde{f}^0(t) = (-1)^\delta f^0(t + b)$
10	$X_5 + H_3(f^3)$	$\tilde{f}^3(t) = (-1)^\delta a^{-1/2} f^3(at + b)$
11	$X_2 + X_5 + H_3(f^3)$	$\tilde{f}^3(t) = f^3(t + b)$
12	$\lambda X_2 + X_3 + X_5 + H_3(f^3)$	$\tilde{f}^3(t) = f^3(t + b)$
13	$H(\mathbf{f})$	$\tilde{\mathbf{f}}(t) = D(\delta_1, \delta_2, \delta_3) R(\gamma) c\mathbf{f}(at + b)$
14	$X_2 + H(\mathbf{f})$	$\tilde{\mathbf{f}}(t) = D(\delta_1, \delta_2, 0) R(\gamma) a^{-2} \mathbf{f}(at + b)$
15	$\lambda X_2 + X_3 + H(\mathbf{f})$	$\tilde{\mathbf{f}}(t) = D(\delta_1, \delta_2, 0) R(\gamma) a^{-2} \mathbf{f}(at + b)$

при этом полученная подалгебра будет подобна исходной. Таким образом, действие внутренних автоморфизмов и линейных преобразований базиса разбивает каждую подалгебру в оптимальной системе  $\Theta_1 L$  на классы подобных. Заметим, что рассматривать следует только такие преобразования, которые не меняют конечномерную составляющую базисных операторов. Каждый класс однозначно определяется конкретным видом функций, от которых зависят базисные операторы, и содержит подалгебры, в которых эти функции связаны некоторым соотношением, например, (3.26). Это соотношение называется *преобразованием подобия*. Данное понятие было впервые введено в работах [64, 66], при этом в последней из них был предложен метод классификации бесконечномерных подалгебр путем вычисления их нормализаторов в алгебре

Ли. Для описания преобразований подобия в Таблице 3.6 используются следующие обозначения:  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$  — произвольные постоянные,  $R(\gamma)$ ,  $D(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  — матрицы из (3.25), параметр  $\delta$  принимает значения  $\{0, 1\}$ .

## 3.2 Модель конвекции бинарной смеси в плоском случае

### 3.2.1 Групповая классификация

В данном параграфе рассматривается групповой анализ уравнений конвекции бинарной смеси (3.1) в двумерном случае [67]. Используются следующие обозначения:  $\mathbf{x} = (x^1, x^3)$  — вектор координат,  $\mathbf{u} = (u^1, u^3)$  — вектор скорости,  $\mathbf{g} = (0, -g)$  — вектор ускорения свободного падения. Необходимость отдельного изучения двумерного случая обусловлена следующими соображениями. В связи с понижением размерности системы уменьшается число базисных операторов допускаемой алгебры Ли, которая является бесконечно-мерной. Построение оптимальных систем для таких алгебр является весьма сложной и трудоемкой задачей, которую не всегда удается решить в полном объеме. Как будет показано ниже, меньшее число базисных операторов (семь против девяти для трехмерных уравнений в случае, когда постоянные  $\beta_T, \beta_C, D_T$  одновременно отличны от нуля) позволяет полностью построить оптимальную систему подалгебр не только первого, но и второго порядков. Подалгебры размерности два дают инвариантные подмодели ранга 1 исходной системы (3.1). Эти подмодели представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений и служат источником многочисленных физически содержательных точных решений.

Результаты группового анализа трехмерных уравнений переносятся на двумерный случай путем ограничения действия допускаемой группы на соответствующее пространство зависимых и независимых переменных [67]. Группа преобразований эквивалентности для двумерных уравнений совпадает с соответствующей группой для трехмерного случая (см. формулы (3.18)). Результаты групповой классификации (без учета преобразований эквивалентности)

Таблица 3.7. Результаты групповой классификации двумерной модели.

Основная алгебра			$X_0, H_0, H_1, H_3, U_T, U_C$	
$\mathcal{D}_T$	$\beta_T$	$\beta_C$	Расширения основной алгебры	$\mathcal{D} = \chi$
0	0	0	$X_{13}, Z_0, T^1, C^1$	$T^2, C^2$
0	0	$\neq 0$	$Z_2, T^1$	$T^2$
0	$\neq 0$	0	$Z_1, C^1$	$C^2$
0	$\neq 0$	$\neq 0$	$Z_3$	$R_1, R_2$
$\neq 0$	0	0	$X_{13}, Z_0, R, L$	
$\neq 0$	0	$\neq 0$	$Z_3$	
$\neq 0$	$\neq 0$	0	$Z_3, L$	
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$Z_3, R_1 (\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_T^*)$	

представлены в Таблице 3.7. Операторы, указанные в таблице, имеют вид

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_{13} = x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^3} - u^3 \frac{\partial}{\partial u^1}, \\
H_i(f^i(t)) &= f^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} + f_t^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i} - \rho_0 x^i f_{tt}^i(t) \frac{\partial}{\partial p}, \quad i = 1, 3, \\
H_0(f^0(t)) &= f^0(t) \frac{\partial}{\partial p}, \\
Z_0 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - u^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} - u^3 \frac{\partial}{\partial u^3} - 2p \frac{\partial}{\partial p}, \\
U_T &= \beta_T \rho_0 g x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial T}, \quad U_C = \beta_C \rho_0 g x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial C}, \\
T^1 &= T \frac{\partial}{\partial T}, \quad T^2 = C \frac{\partial}{\partial T}, \quad C^1 = C \frac{\partial}{\partial C}, \quad C^2 = T \frac{\partial}{\partial C}, \\
R &= T^1 + C^1, \quad R_1 = T^1 - \frac{\beta_T}{\beta_C} C^2, \quad R_2 = C^1 - \frac{\beta_C}{\beta_T} T^2, \\
Z_1 &= Z_0 - 3T^1, \quad Z_2 = Z_0 - 3C^1, \quad Z_3 = Z_0 - 3T^1 - 3C^1, \\
L &= (\mathcal{D}_T T + (\mathcal{D} - \chi) C) \frac{\partial}{\partial C}.
\end{aligned}$$

Двумерные уравнения модели также обладают дискретными симметриями отражения  $d_1$  и  $d_3$  из (3.15). Следует отметить, что при  $\beta_T \neq 0$ ,  $\beta_C = 0$ ,  $\mathcal{D}_T = 0$  полученные результаты согласуются с результатами группового анализа уравнений Обербека–Буссинеска однокомпонентной жидкости в плоском случае [269, 270]. Эти уравнения допускают алгебру Ли операторов с базисом  $X_0, H_1, H_3, H_0, U_T, Z_1$ .

### 3.2.2 Структура допускаемой алгебры операторов

Рассмотрим двумерные уравнения (3.1) с учетом эффекта термодиффузии и линейной зависимости плотности от температуры и концентрации (таким образом, коэффициенты  $\beta_T$ ,  $\beta_C$ ,  $\mathcal{D}_T$  отличны от нуля). Согласно результатам групповой классификации, в этом случае уравнения допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов  $\bar{L}$ , для которой справедливо разложение  $\bar{L} = L^4 \oplus \bar{L}^\infty$  в полуправильную сумму конечномерной подалгебры  $L^4$  с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \rho_0 g x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{\beta_C} \frac{\partial}{\partial C}, \quad X_3 = \rho_0 g x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{\beta_T} \frac{\partial}{\partial T},$$

$$X_4 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} - u^1 \frac{\partial}{\partial u^1} - u^3 \frac{\partial}{\partial u^3} - 2p \frac{\partial}{\partial p} - 3T \frac{\partial}{\partial T} - 3C \frac{\partial}{\partial C}$$

и бесконечномерного идеала  $\bar{L}^\infty$ , образованного операторами

$$H_1(f^1(t)) = f^1(t) \frac{\partial}{\partial x^1} + f_t^1(t) \frac{\partial}{\partial u^1} - \rho_0 x^1 f_{tt}^1(t) \frac{\partial}{\partial p},$$

$$H_3(f^3(t)) = f^3(t) \frac{\partial}{\partial x^3} + f_t^3(t) \frac{\partial}{\partial u^3} - \rho_0 x^3 f_{tt}^3(t) \frac{\partial}{\partial p},$$

$$H_0(f^0(t)) = f^0(t) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Здесь для удобства дальнейших вычислений были введены новые обозначения операторов. Если коэффициент термодиффузии связан с другими параметрами соотношением  $\mathcal{D}_T = \beta_T(\mathcal{D} - \chi)/\beta_C$ ,  $\mathcal{D} \neq \chi$ , то система также инвариантна относительно оператора

$$R_1 = T \frac{\partial}{\partial T} - \frac{\beta_T}{\beta_C} T \frac{\partial}{\partial C}.$$

В дальнейшем этот частный случай не рассматривается.

Таблица 3.8. Оптимальная система подалгебр  $\Theta_1 \bar{L}$ .

<i>r.i</i>	Базис	Преобразование подобия
1.1	$X_1$	
1.2	$X_1 + X_2$	
1.3	$X_1 + \lambda X_2 + X_3$	
1.4	$X_4$	
1.5	$H_0(f^0), f^0 \not\equiv 0$	$\tilde{f}^0(t) = cf^0(at + b)$
1.6	$X_2 - X_3 + H_0(f^0), f^0 \not\equiv 0$	$\tilde{f}^0(t) = (-1)^\delta a^{-1/2} f^0(at + b)$
1.7	$H_1(f^1) + H_3(f^3)$	$\tilde{f}^1(t) = (-1)^\delta cf^1(at + b)$ $\tilde{f}^3(t) = cf^3(at + b)$
1.8	$X_2 + H_1(f^1) + H_3(f^3)$	$\tilde{f}^1(t) = (-1)^\delta a^{-2} f^1(at + b)$ $\tilde{f}^3(t) = a^{-2} f^3(at + b)$
1.9	$\lambda X_2 + X_3 + H_1(f^1) + H_3(f^3)$	$\tilde{f}^1(t) = (-1)^\delta a^{-2} f^1(at + b)$ $\tilde{f}^3(t) = a^{-2} f^3(at + b)$

По аналогии с трехмерным случаем, введем следующие обозначения:

$$\mathbf{f}(t) = (f^1(t), f^3(t)), \quad f^0 = f^0(t)$$

— произвольные гладкие функции,

$$H(\mathbf{f}) = H_1(f^1) + H_3(f^3), \quad H_0(f^0)$$

— операторы алгебры  $L^\infty$ . Функции  $\mathbf{g}(t)$ ,  $g^0(t)$ ,  $\mathbf{h}(t)$ ,  $h^0(t)$  вводятся аналогичным образом. Коммутаторы базисных операторов и группа внутренних автоморфизмов для случая двумерных уравнений могут быть определены из Таблиц 3.2 и 3.3 путем сужения на соответствующее пространство зависимых и независимых переменных  $(t, x^1, x^3, u^1, u^3, p, T, C)$ .

### 3.2.3 Оптимальные системы подалгебр

Перейдем к построению оптимальной системы подалгебр для алгебры Ли  $\bar{L}$ . Сначала строится оптимальная система  $\Theta L^4$  для алгебры Ли  $L^4$ . Эта система приведена в Таблице 3.4.

Построение оптимальной системы первого порядка  $\Theta_1\bar{L}$  сводится к классификации подалгебр из двух классов:

- 1)  $\{H(\mathbf{f}) + H_0(f^0)\},$
- 2)  $\{R_i + H(\mathbf{f}) + H_0(f^0)\},$

где  $\{R_i\} \in \Theta_1 L^4$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Первый класс лежит в идеале  $\bar{L}^\infty$ , а второй класс имеет нулевое пересечение с этим идеалом. Оптимальная система  $\Theta_1\bar{L}$  приведена в Таблице 3.8. Номер подалгебры имеет вид  $r.i$ , где  $r$  указывает на размерность подалгебры, а  $i$  — на порядковый номер. В третьем столбце указаны преобразования подобия. При этом используются следующие обозначения:  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$  — произвольные постоянные, параметр  $\delta$  принимает значения  $\{0, 1\}$ .

Перейдем к построению оптимальной системы второго порядка  $\Theta_2\bar{L}$ . Для ее нахождения необходимо классифицировать подалгебры из трех классов:

- 1)  $\{H(\mathbf{f}) + H_0(f^0), \quad H(\mathbf{g}) + H_0(g^0)\},$
- 2)  $\{R_i + H(\mathbf{f}) + H_0(f^0), \quad H(\mathbf{g}) + H_0(g^0)\},$
- 3)  $\{P_j + H(\mathbf{f}) + H_0(f^0), \quad Q_j + H(\mathbf{g}) + H_0(g^0)\},$

где  $\{R_i\} \in \Theta_1 L^4$ ,  $\{P_j, Q_j\} \in \Theta_2 L^4$ ,  $i = 1, \dots, 6$ ,  $j = 1, \dots, 8$ . Здесь первый класс принадлежит идеалу  $\bar{L}^\infty$ , а второй и третий классы имеют одномерное и нулевое пересечение с идеалом  $\bar{L}^\infty$  соответственно. Детали построения оптимальной системы можно найти в работе [69].

Оптимальная система  $\Theta_2\bar{L}$  приведена в Таблице 3.9. Используется тот же принцип нумерации подалгебр, что и в Таблице 3.8. Постоянные  $\lambda, \mu, \gamma, \sigma$  принимают любые вещественные значения, если не оговорено противное. Произвольные функции в подалгебрах с номерами 2.44 — 2.58 удовлетворяют условиям, указанным в третьем столбце. Часть этих условий представляет собой обыкновенные дифференциальные уравнения, решение которых записывается в явном виде. Эти уравнения можно разрешить относительно различных функций, при этом получаются громоздкие выражения. Форма представления результатов, использованная в таблице, является более предпочтительной.

Таблица 3.9. Оптимальная система подалгебр  $\Theta_2 \bar{L}$ .

<i>r.i</i>	Базис	Примечание
2.1	$X_1, H_0(1)$	
2.2	$X_1, H_3(1)$	
2.3	$X_1, H_1(1) + H_0(1)$	
2.4	$X_1, H_1(1) + H_3(\lambda)$	$\lambda \geq 0$
2.5	$X_1, H_0(e^{\pm t})$	
2.6	$X_1, H_3(e^{\pm t})$	
2.7	$X_1, H_1(e^{\pm t}) + H_3(\lambda e^{\pm t})$	$\lambda \geq 0$
2.8	$X_1, X_2$	
2.9	$X_1, X_2 \pm H_3(1)$	
2.10	$X_1, X_2 + H_1(1) + H_3(\mu)$	
2.11	$X_1, \lambda X_2 + X_3$	
2.12	$X_1, \lambda X_2 + X_3 \pm H_3(1)$	
2.13	$X_1, \lambda X_2 + X_3 + H_1(1) + H_3(\mu)$	
2.14	$X_1, X_2 - X_3 + H_0(1)$	
2.15	$X_1, X_2 - X_3 + H_1(1) + H_0(\lambda)$	$\lambda > 0$
2.16	$X_1, X_4$	
2.17	$X_4, H_0(t^\gamma)$	
2.18	$X_4, H_3(t^\gamma)$	
2.19	$X_4, H_1(t^\gamma) + H_3(\mu t^\gamma)$	$\mu \geq 0$
2.20	$X_4, H_3(\sqrt{t}) + H_0(\lambda/t)$	$\lambda > 0$
2.21	$X_4, H_1(\sqrt{t}) + H_3(\mu\sqrt{t}) + H_0(\lambda/t)$	$\lambda > 0, \mu \geq 0$
2.22	$X_4, X_2$	
2.23	$X_4, \lambda X_2 + X_3 + H_0(\mu\sqrt{t})$	$\mu \geq 0$
2.24	$X_4, \lambda X_2 + \sigma X_3 + H_3(t^2)$	$\lambda^2 + \sigma^2 \neq 0$

Таблица 3.9. Оптимальная система подалгебр  $\Theta_2 \bar{L}$  (продолжение).

<i>r.i</i>	Базис	Примечание
2.25	$X_4, \lambda X_2 + \sigma X_3 + H_1(t^2) + H_3(\mu t^2)$	$\lambda^2 + \sigma^2 \neq 0,$ $\mu \geq 0$
2.26	$X_4, \lambda X_2 + \left(\frac{9}{4g} - \lambda\right)X_3 + H_3(t^2) + H_0(\mu\sqrt{t})$	$\mu > 0$
2.27	$X_1 + X_2, H_0(1)$	
2.28	$X_1 + X_2, H_1(1) + H_0(\lambda)$	$\lambda \geq 0$
2.29	$X_1 + X_2, H_1(\lambda) + H_3(1) + H_0(\rho_0 g t)$	$\lambda \geq 0$
2.30	$X_1 + \lambda X_2, H_0(e^{\pm t})$	$\lambda > 0$
2.31	$X_1 + \lambda X_2, H_1(e^{\pm t})$	$\lambda > 0$
2.32	$X_1 + \lambda X_2,$ $H_1(\mu e^{\pm t}) + H_3(e^{\pm t}) + H_0(\lambda \rho_0 g t e^{\pm t})$	$\lambda > 0, \mu \geq 0$
2.33	$X_1 + \lambda X_2 + X_3, H_0(1)$	
2.34	$X_1 + \lambda X_2 + X_3, H_1(1) + H_0(\mu)$	$\mu \geq 0$
2.35	$X_1 + \lambda X_2 + X_3,$ $H_1(\mu) + H_3(1) + H_0(\rho_0 g(\lambda + 1)t)$	$\mu \geq 0$
2.36	$X_1 + \lambda X_2 + \mu X_3, H_0(e^{\pm t})$	$\mu > 0$
2.37	$X_1 + \lambda X_2 + \mu X_3, H_1(e^{\pm t})$	$\mu > 0$
2.38	$X_1 + \lambda X_2 + \mu X_3,$ $H_1(\sigma e^{\pm t}) + H_3(e^{\pm t}) + H_0(\rho_0 g(\lambda + \mu)t e^{\pm t})$	$\mu > 0, \sigma \geq 0$
2.39	$X_1 + X_2, X_1 + X_3 + H_1(\lambda) + H_0(\mu)$	$\lambda \geq 0, \mu \neq 0$
2.40	$X_1 + X_2,$ $\lambda X_1 + X_3 + H_1(\mu) + H_3(\sigma) + H_0(\sigma \rho_0 g t)$	$\mu \geq 0$
2.41	$X_1 + X_3, X_2 + H_1(\lambda) + H_3(\mu) + H_0(\mu \rho_0 g t)$	$\lambda \geq 0$
2.42	$H_0(f^0), H_0(g^0)$	
2.43	$H_1(f^1) + H_3(f^3), H_0(g^0)$	

<i>r.i</i>	Базис	Примечание
2.44	$H_3(f^3), H_3(g^3) + H_0(g^0)$	$f_{tt}^3 g^3 - f^3 g_{tt}^3 = 0, \quad g^3 \neq c f^3, \quad g^0 \neq 0$
2.45	$H_1(f^1) + H_3(\lambda f^1), H_1(g^1) + H_3(\lambda g^1) + H_0(g^0)$	$f_{tt}^1 g^1 - f^1 g_{tt}^1 = 0, \quad g^1 \neq c f^1, \quad g^0 \neq 0, \quad \lambda \geq 0$
2.46	$H_1(f^1) + H_3(f^3), H_1(g^1) + H_3(g^3)$	$f_{tt}^1 g^1 - f^1 g_{tt}^1 + f_{tt}^3 g^3 - f^3 g_{tt}^3 = 0$
2.47	$X_2 + H_1(f^1), H_0(g^0)$	
2.48	$X_2 + H_1(f^1) + H_3(f^3),$ $H_1(g^1) + H_3(g^3) + H_0(g^0)$	$f_{tt}^1 g^1 - f^1 g_{tt}^1 = 0, \quad (f_{tt}^3 - g)g^3 - f^3 g_{tt}^3 = 0,$ $f^1 g^3 - f^3 g^1 = 0, \quad f^3, g^0 \neq 0$
2.49	$X_2 + H_1(f^1) + H_3(f^3), H_1(g^1) + H_3(g^3)$	$f_{tt}^1 g^1 - f^1 g_{tt}^1 + (f_{tt}^3 - g)g^3 - f^3 g_{tt}^3 = 0$
2.50	$X_2 - X_3 + H_0(f^0), H_0(g^0)$	$f^0 \neq 0$
2.51	$X_2 - X_3 + H_0(f^0), H_1(g^1) + H_3(g^3)$	$f_{tt}^1 g^1 - f^1 g_{tt}^1 = 0, \quad f^1, g^0 \neq 0$
2.52	$X_2 - X_3 + H_1(f^1), H_1(g^1) + H_0(g^0)$	$\lambda \neq -1$
2.53	$\lambda X_2 + X_3 + H_1(f^1), H_0(g^0)$	
2.54	$\lambda X_2 + X_3 + H_1(f^1) + H_3(f^3),$ $H_1(g^1) + H_3(g^3) + H_0(g^0)$	$f_{tt}^1 g^1 - f^1 g_{tt}^1 = 0, \quad (f_{tt}^3 - g(\lambda + 1))g^3 - f^3 g_{tt}^3 = 0,$ $f^1 g^3 - f^3 g^1 = 0, \quad f^3, g^0 \neq 0$
2.55	$\lambda X_2 + X_3 + H_1(f^1) + H_3(f^3), H_1(g^1) + H_3(g^3)$	$f_{tt}^1 g^1 - f^1 g_{tt}^1 + (f_{tt}^3 - g(\lambda + 1))g^3 - f^3 g_{tt}^3 = 0$
2.56	$X_2 + H_1(f^1), X_3 + H_1(f^1) + H_0(g^0)$	$g^0 \neq 0$
2.57	$X_2 + H_1(f^1) + H_3(f^3),$ $X_3 + H_1(g^1) + H_3(g^3) + H_0(g^0)$	$f_{tt}^1 g^1 - f^1 g_{tt}^1 = 0, \quad (f_{tt}^3 - g)g^3 - f^3(g_{tt}^3 - g) = 0,$ $f^1 g^3 - f^3 g^1 = 0, \quad f^3, g^0 \neq 0$
2.58	$X_2 + H_1(f^1) + H_3(f^3), X_3 + H_1(g^1) + H_3(g^3)$	$f_{tt}^1 g^1 - f^1 g_{tt}^1 + (f_{tt}^3 - g)g^3 - f^3(g_{tt}^3 - g) = 0$

### 3.3 Уравнения движения многокомпонентной смеси

#### 3.3.1 Групповые свойства

Рассмотрим уравнения конвекции многокомпонентной смеси (см. (2.32)):

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\rho_0^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{g}(\beta_T T + \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} \mathbf{C}), \\ \partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \chi \nabla^2 T, \\ \partial_t \mathbf{C} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{C} &= D \nabla^2 \mathbf{C} + \mathbf{D}_T \nabla^2 T, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Здесь  $T$  и  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{n-1})^T$  — отклонения температуры и концентрации от средних значений  $T_0$  и  $\mathbf{C}_0 = (C_{10}, \dots, C_{n-1,0})^T$  соответственно. Кроме этого,  $B$  — диагональная матрица коэффициентов концентрационного расширения (2.24),  $D$  — матрица из  $(n-1)^2$  коэффициентов диффузии  $D_{ij}$ ,  $\mathbf{D}_T$  — вектор коэффициентов термодиффузии (2.16).

Пусть коэффициенты теплового и концентрационного расширений  $\beta_T$  и  $\beta_i$ , а также коэффициенты термодиффузии  $D_{Ti}$  отличны от нуля для всех  $i = 1, \dots, n-1$ . Непосредственно проверяется, что в этом случае система (3.27) допускает алгебру Ли операторов  $L$ , которая может быть представлена в виде полуправильной суммы  $L = L^{n+3} \oplus L^\infty$ , где подалгебра  $L^{n+3}$  размерности  $n+3$  образована операторами

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_{12} &= x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^2} - u^2 \frac{\partial}{\partial u^1}, \\ Z &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) - 2p \frac{\partial}{\partial p} - 3T \frac{\partial}{\partial T} - \sum_{i=1}^{n-1} 3C_i \frac{\partial}{\partial C_i}, \\ U_T &= \beta_T \rho_0 g x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial T}, & U_i &= \beta_i \rho_0 g x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial C_i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (3.28)$$

а бесконечномерный идеал  $L^\infty$  имеет базис

$$\begin{aligned} H_i(f^i(t)) &= f^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} + f_t^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i} - \rho_0 x^i f_{tt}^i(t) \frac{\partial}{\partial p}, \quad i = 1, 2, 3, \\ H_0(f^0(t)) &= f^0(t) \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Данный результат был получен путем обобщения групповых свойств уравнений конвекции бинарной смеси на случай смеси из  $n$  компонент. Однако пока еще не доказано, что группа преобразований, порождаемая алгеброй  $L$ , является наиболее широкой группой, допускаемой уравнениями (3.27).

Преобразования эквивалентности (3.18) уравнений движения бинарной смеси могут быть обобщены на многокомпонентный случай аналогичным образом. Наибольший интерес представляет преобразование  $E_4$ , которое позволяет исключить член, характеризующий эффект термодиффузии, из уравнений движения. В случае многокомпонентной смеси это преобразование порождается оператором

$$\mathbf{E}_4 = T \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} - \boldsymbol{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta_T} + (\chi E - D) \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}_T},$$

где используются следующие обозначения

$$\mathbf{E}_4 = (E_1, \dots, E_{n-1})^T, \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})^T,$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} = \left( \frac{\partial}{\partial C_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial C_{n-1}} \right)^T, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}_T} = \left( \frac{\partial}{\partial D_{T1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial D_{T,n-1}} \right)^T,$$

$E$  — единичная матрица, индекс  $T$  указывает на вектор-столбец. Оператор  $\mathbf{E}_4$  порождает  $(n-1)$ -параметрическую подгруппу преобразований эквивалентности

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + T\mathbf{a}, \quad \tilde{\beta}_T = \beta_T - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a}, \quad \tilde{\mathbf{D}}_T = \mathbf{D}_T + (\chi E - D)\mathbf{a}. \quad (3.30)$$

где  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})^T$  — вектор групповых параметров. Полагая  $\mathbf{a} = -(\chi E - D)^{-1} \mathbf{D}_T$  в (3.30), можно исключить член  $\mathbf{D}_T \nabla^2 T$ , характеризующий эффект термодиффузии, из предпоследнего уравнения (3.27). Данное преобразование соответствует введению нового вектора концентраций по формуле

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - (\chi E - D)^{-1} \mathbf{D}_T T. \quad (3.31)$$

Как и в случае бинарной смеси (см. (3.19), преобразование (3.31) не позволяет исключить член, пропорциональный градиенту температуры, из условия отсутствия потока массы компонент смеси через непроницаемую границу  $\partial\Omega$  с вектором единичной нормали  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.32)$$

Здесь потоки  $\mathbf{J}_i$  даются формулами (2.15).

### 3.3.2 Исключение коэффициентов перекрестной диффузии

Как было отмечено выше, уравнения конвекции многокомпонентной смеси (3.27) содержат матрицу  $D$  из  $(n - 1)^2$  коэффициентов диффузии  $D_{ij}$ . Рассмотрим способ упрощения этих уравнений путем исключения коэффициентов перекрестной диффузии (т.е. элементов  $D_{ij}$  при  $i \neq j$ ). Известно, что матрица диффузии может быть приведена к диагональному виду с помощью преобразования  $\tilde{D} = V^{-1}DV$  [290]. Здесь  $\tilde{D}$  — матрица, на главной диагонали которой стоят собственные значения матрицы  $D$ , а  $V$  — матрица, столбцы которой являются собственными векторами  $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{i,n-1})^T$  матрицы  $D$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Указанный способ исключения коэффициентов перекрестной диффузии может быть обобщен на уравнения движения многокомпонентной смеси с эффектом Соре [74, 75]. Введем дополнительную матрицу

$$Q = \text{diag}\{q_1, \dots, q_{n-1}\}, \quad q_i = \beta_i^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j v_{ij} \quad (3.33)$$

а также сделаем замену концентраций и коэффициентов термодиффузии по следующим формулам

$$\mathbf{C} = VQ^{-1}\tilde{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{D}_T = VQ^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_T. \quad (3.34)$$

Будем предполагать, что  $q_i \neq 0$ , поэтому  $\det Q \neq 0$  и преобразование (3.34) обратимо. Применяя это преобразование к уравнениям (3.27), получим систему

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\rho_0^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{g}(\beta_T T + \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} \tilde{\mathbf{C}}), \\ \partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \chi \nabla^2 T, \\ \partial_t \tilde{\mathbf{C}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{C}} &= \tilde{D} \nabla^2 \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}_T \nabla^2 T, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Отсюда видно, что преобразование (3.34) оставляет уравнения Навье–Стокса неизменными (с помощью матрицы  $Q$ ) и диагонализирует матрицу диффузии. В безразмерных переменных (2.14), (2.33) данное преобразование записывается в виде

$$\mathbf{C} = BV(BQ)^{-1}\tilde{\mathbf{C}}, \quad \boldsymbol{\psi} = BV(BQ)^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}, \quad (3.36)$$

где  $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$  — вектор отношений разделения (2.25). С помощью указанной замены переменных безразмерные уравнения движения многокомпонентной смеси (2.34) приводятся к системе с диагональной матрицей  $\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{C}} = \nu^{-1}\widetilde{D}$ , вектором концентраций  $\widetilde{\mathbf{C}}$  и вектором отношений разделения  $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}$ . Используя (2.26) и (3.33), легко доказать следующее утверждение.

**Утверждение 3.2.** Суммарное отношение разделения  $\Psi = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i$  и сумма безразмерных концентраций  $\sum_{i=1}^{n-1} C_i$  инвариантны относительно преобразования (3.36).

В конкретных задачах уравнения движения дополняются начальными и граничными условиями. Предположим, что имеется начально–краевая задача для системы (3.27) и формулы (3.34) преобразуют начальные и граничные условия в условия *с той же дифференциальной структурой и диагональной матрицей диффузии* (т.е.  $\mathbf{C}$ ,  $D$ ,  $\mathbf{D}_T$  заменяются на  $\widetilde{\mathbf{C}}$ ,  $\widetilde{D}$ ,  $\widetilde{\mathbf{D}}_T$  соответственно). Тогда можно утверждать, что многокомпонентная смесь в данной конфигурации эквивалентна другой смеси без эффекта перекрестной диффузии. Последняя смесь характеризуется вектором концентраций  $\widetilde{\mathbf{C}}$  и вектором коэффициентов термодиффузии  $\widetilde{\mathbf{D}}_T$ . Исключение коэффициентов перекрестной диффузии существенно уменьшает число управляющих параметров, тем самым упрощая поставленную задачу.

В частности, преобразование (3.34) может быть применено к задачам устойчивости. Предположим, что основное решение  $\mathbf{u}_s$ ,  $p_s$ ,  $T_s$ ,  $\mathbf{C}_s$ , устойчивость которого изучается, удовлетворяет начально–краевой задаче для уравнений (3.27) и формулы (3.34) преобразуют условия задачи к условиям с той же дифференциальной структурой и диагональной матрицей диффузии. Тогда эти же формулы переводят основное решение в решение  $\mathbf{u}_s$ ,  $p_s$ ,  $T_s$ ,  $\widetilde{\mathbf{C}}_s$

соответствующей задачи для уравнений (3.35). Представим поля скорости, давления, температуры и концентраций в виде суммы основного решения и его возмущения:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}', \quad p = p_s + p', \quad T = T_s + T', \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_s + \mathbf{C}'.$$

Подставляя эти выражения в систему (3.27), получим уравнения возмущений. Легко проверяется, что формулы (3.34), в которых следует заменить  $\mathbf{C}$  на  $\mathbf{C}'$  и  $\tilde{\mathbf{C}}$  на  $\tilde{\mathbf{C}}'$ , переводят уравнения возмущений в уравнения, зависящие от  $\tilde{D}$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}_T$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}'$  и основного решения  $\mathbf{u}_s$ ,  $p_s$ ,  $T_s$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_s$ . Если условия для возмущений преобразуются аналогичным образом, то задача об устойчивости может быть сведена к задаче с диагональной матрицей диффузии. Заметим, что при работе с безразмерными переменными следует использовать преобразование (3.36). Приведенные размышления можно сформулировать в виде теоремы.

**Теорема 3.1.** Задача об устойчивости может быть сведена к задаче с диагональной матрицей диффузии, если формулы (3.34) преобразуют начально—краевые условия для основного решения и возмущений к условиям с той же дифференциальной структурой, в которых  $\mathbf{C}$ ,  $D$ ,  $\mathbf{D}_T$  заменены на  $\tilde{\mathbf{C}}$ ,  $\tilde{D}$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}_T$  соответственно.

Предположим, что известна зависимость характеристик устойчивости (например, критического числа Грасгофа или Рэлея) от безразмерных параметров  $\text{Pr}$ ,  $\tilde{\mathcal{SC}}$ ,  $\tilde{\psi}$  для задачи с диагональной матрицей диффузии. Тогда переход к отношениям разделения  $\psi$  по формуле (3.36) и замена диагональных элементов матрицы  $\tilde{\mathcal{SC}}$  на собственные значения матрицы  $\mathcal{SC}$  позволяет учесть эффект перекрестной диффузии. Из Утверждения 3.2 следует, что если какие—либо характеристики устойчивости зависят только от суммарного отношения разделения  $\Psi$ , то эффект перекрестной диффузии на них не влияет.

Рассмотрим некоторые типы граничных условий для концентрации смеси, которые используются в задачах конвекции с эффектом термодиффузии. Если смесь находится в области  $\Omega$  с *непроницаемой границей*  $\partial\Omega$ , то диффузионные потоки компонентов через границу должны обращаться в ноль, см. (3.32). Преобразование (3.34) сохраняет дифференциальную структуру данно-

го граничного условия, приводя матрицу диффузии к диагональному виду:

$$\left( D \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{n}} + \mathbf{D}_T \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left( \tilde{D} \frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{n}} + \tilde{\mathbf{D}}_T \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.37)$$

где

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla C_1 \cdot \mathbf{n}, \dots, \nabla C_{n-1} \cdot \mathbf{n})^T.$$

На *проницаемой границе* обычно задается значение вектора концентраций. Использование формул (3.34) дает

$$\mathbf{C}|_{\partial\Omega} = \mathbf{C}_* \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{C}}|_{\partial\Omega} = \tilde{\mathbf{C}}_*, \quad (3.38)$$

где  $\mathbf{C}_*$  — постоянный вектор и  $\tilde{\mathbf{C}}_* = QV^{-1}\mathbf{C}_*$ .

Во многих практических задачах условие (3.37) или (3.38) является единственным условием для концентрации. К ним относятся задачи о конвективной устойчивости многокомпонентных смесей в плоском и вертикальном слоях (см. параграфы 4.1, 4.2), а также в термодиффузионной колонне (см. параграф 5.2). Преобразование (3.34) позволяет существенно упростить эти задачи путем перехода к диагональной матрице коэффициентов диффузии.

## 3.4 Модель вибрационной конвекции бинарной смеси

### 3.4.1 Уравнения движения смеси в вибрационном поле

В данном параграфе исследуются групповые свойства уравнений вибрационной конвекции бинарной смеси с учетом эффекта Соре [82]. Предполагается, что плотность смеси линейно зависит от температуры и концентрации согласно (2.12). Пусть смесь находится в поле внешней силы, изменяющейся со временем по гармоническому закону с круговой частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$  в направлении единичного вектора  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ . Таким образом, вектор ускорения этой силы имеет вид  $A\omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{e}$ . Будем рассматривать вибрации высокой частоты, период которых  $\tau = 2\pi/\omega$  много меньше характерных времен системы:

$$\tau \ll \min(L^2/\nu, L^2/\chi, L^2/\mathcal{D}), \quad (3.39)$$

где  $L$  — характерный размер,  $\nu, \chi, \mathcal{D}$  — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и диффузии соответственно. В этом случае поля скорости, давления, температуры и концентрации можно представить в виде суммы двух составляющих: осредненной (получается осреднением данной величины по периоду колебаний) и пульсационной (представляет собой разность данной величины и ее осреднения). Подставляя данное разложение в уравнения движения бинарной смеси (2.13) и осредняя полученные уравнения по периоду колебаний, находим уравнения для осредненных компонент. Уравнения для пульсационных компонент получаются вычитанием осредненных уравнений из исходных (неосредненных) уравнений и последующим упрощением полученных соотношений. Заметим, что вывод уравнений для пульсационных компонент в монографии [46] основан на отделении "быстрых" слагаемых в исходных уравнениях. С математической точки зрения этот подход является некорректным. Строгий вывод уравнений термовибрационной конвекции подробно описан в работе [80]. В предположении малой амплитуды и высокой частоты колебаний

$$A \ll \frac{L}{\max(\beta_T \Delta T, \beta_C \Delta C)}, \quad \tau \ll \sqrt{\frac{L}{\max(\beta_T \Delta T, \beta_C \Delta C) g}}, \quad (3.40)$$

уравнения для пульсационных компонент интегрируются в явном виде. Здесь  $\Delta T$  и  $\Delta C$  — характерные разности температуры и концентрации соответственно. В задачах, где разность концентраций обусловлена эффектом Соре, величина  $\Delta C$  может быть оценена из соотношения (2.4):  $|\Delta C| \sim \Delta T \mathcal{D}_T / \mathcal{D}$ . При указанных предположениях уравнения для осредненных компонент имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\rho_0^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - (\beta_T T + \beta_C C) \mathbf{g} + \\ &+ \frac{(A\omega)^2}{2} (((\beta_T T + \beta_C C) \mathbf{e} - \nabla F) \cdot \nabla) \nabla F, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \chi \nabla^2 T, \quad (3.42)$$

$$\partial_t C + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C = \mathcal{D} \nabla^2 C + \mathcal{D}_T \nabla^2 T, \quad (3.43)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.44)$$

$$\nabla^2 F - (\beta_T \nabla T + \beta_C \nabla C) \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (3.45)$$

а пульсационные компоненты определяются по формулам

$$\mathbf{u}' = -A\omega \sin(\omega t) \mathbf{w}, \quad p' = -\rho_0 A\omega^2 \cos(\omega t) F, \quad (3.46)$$

$$T' = -A \cos(\omega t) \mathbf{w} \cdot \nabla T, \quad C' = -A \cos(\omega t) \mathbf{w} \cdot \nabla C.$$

Вектор  $\mathbf{w}$  и функция  $F$ , характеризующие амплитуды колебаний скорости и давления соответственно, связаны с разложением вектора  $(\beta_T T + \beta_C C) \mathbf{e}$  на безвихревой вектор  $\nabla F$  и соленоидальный вектор  $\mathbf{w}$  с нулевой проекцией на нормаль  $\mathbf{n}$  к границе области движения  $\Gamma$ :

$$(\beta_T T + \beta_C C) \mathbf{e} = \mathbf{w} + \nabla F, \quad (3.47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \quad (3.48)$$

В уравнении (3.41) вектор  $\mathbf{g}$  есть вектор ускорения постоянной внешней силы  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$  (таким образом, рассматривается более общая ситуация, чем в параграфах 3.1 — 3.3, где вектор  $\mathbf{g}$  был параллелен одной из координатных осей).

### 3.4.2 Групповые свойства

Система (3.41)–(3.45) содержит пятнадцать произвольных параметров (включая компоненты векторов  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{e}$ ). Поставим задачу групповой классификации уравнений модели относительно этих параметров. Будем предполагать, что постоянные  $\mathbf{g}$ ,  $\mathcal{D}_T$ ,  $\beta_T$ ,  $\beta_C$  могут обращаться в ноль, если соответствующие члены отсутствуют в уравнениях. В то же время, будем считать, что  $\beta_T^2 + \beta_C^2 \neq 0$  (в противном случае из (3.45), (3.47), (3.48) следует  $F = 0$  и уравнения (3.41)–(3.45) сводятся к модели конвекции бинарной смеси, групповые свойства которой были изучены в параграфе 3.1). Кроме этого, предполагается, что  $|\mathbf{e}| \neq 0$ , а величины  $\rho_0$ ,  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $A$ ,  $\omega$  положительны.

Инфинитезимальный оператор, допускаемый системой, ищем в виде

$$X = \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \eta^p \frac{\partial}{\partial p} + \eta^T \frac{\partial}{\partial T} + \eta^C \frac{\partial}{\partial C} + \eta^F \frac{\partial}{\partial F},$$

считая, что его компоненты зависят от всех зависимых и независимых переменных (предполагается суммирование по повторяющемуся индексу  $i =$

1, 2, 3). Для формирования определяющих уравнений нужно подействовать продолженным оператором  $\frac{X}{2}$  на уравнения (3.41)–(3.45) и перейти на многообразие, задаваемое системой. Рассматриваемые уравнения не находятся в инволюции, что затрудняет выделение внешних и внутренних переменных. Добавим к системе ее дифференциальное следствие

$$(\nabla \mathbf{u})^2 + 2(u_2^1 u_1^2 + u_3^1 u_1^3 + u_3^2 u_2^3) + \rho_0^{-1} \nabla^2 p + \nabla J \cdot \mathbf{g} + \frac{(A\omega)^2}{2} \times \quad (3.49)$$

$$\times \left[ F_{11}^2 + F_{22}^2 + F_{33}^2 + 2(F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{23}^2) - \nabla J \cdot (\Upsilon \mathbf{e}) + (\nabla F - J \mathbf{e}) \cdot (\Upsilon^* \mathbf{e}) \right] = 0.$$

Здесь  $J = \beta_T T + \beta_C C$ , а  $\Upsilon$  и  $\Upsilon^*$  есть матрицы вторых производных с компонентами  $\{\Upsilon\}_{ij} = F_{ij}$  и  $\{\Upsilon^*\}_{ij} = J_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Равенство (3.49) получается дифференцированием уравнений (3.41) по  $x^1, x^2, x^3$  соответственно и использованием (3.44), (3.45). При переходе на многообразие также будем учитывать дифференциальные следствия из уравнения (3.44):

$$u_{t1}^1 + u_{t2}^2 + u_{t3}^3 = 0, \quad u_{1i}^1 + u_{2i}^2 + u_{3i}^3 = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.50)$$

Система (3.41)–(3.45), (3.49), (3.50) находится в инволюции. Теперь нетрудно выделить внешние переменные:  $u_{11}^1, u_{11}^2, u_{11}^3, p_{11}, T_{11}, C_{11}, F_{11}, u_1^1, u_{t3}^3, u_{13}^3, u_{23}^3, u_{33}^3$ . Действуя продолженным оператором  $\frac{X}{2}$  на систему и подставляя выражения для внешних переменных в полученные уравнения, приходим к системе определяющих уравнений. После достаточно длинных выкладок ее решение представляется в виде

$$\begin{aligned} \xi^t &= 2c_4 t + c_0, \\ \xi^1 &= c_4 x^1 + c_1 x^2 + c_2 x^3 + f^1(t), \\ \xi^2 &= -c_1 x^1 + c_4 x^2 + c_3 x^3 + f^2(t), \\ \xi^3 &= -c_2 x^1 - c_3 x^2 + c_4 x^3 + f^3(t), \\ \eta^1 &= -c_4 u^1 + c_1 u^2 + c_2 u^3 + f_t^1(t), \\ \eta^2 &= -c_1 u^1 - c_4 u^2 + c_3 u^3 + f_t^2(t), \\ \eta^3 &= -c_2 u^1 - c_3 u^2 - c_4 u^3 + f_t^3(t), \\ \eta^p &= -\rho_0 (f_{tt}^1(t) x^1 + f_{tt}^2(t) x^2 + f_{tt}^3(t) x^3 + \\ &\quad + (\beta_T c_5 + \beta_C c_6)(g_1 x^1 + g_2 x^2 + g_3 x^3)) - 2c_4 p + f^0(t), \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned}\eta^T &= c_7 T + c_9 C + c_5, \\ \eta^C &= c_8 T + c_{10} C + c_6, \\ \eta^F &= (\beta_T c_5 + \beta_C c_6)(e_1 x^1 + e_2 x^2 + e_3 x^3) + f(t).\end{aligned}$$

Здесь  $c_0 - c_{10}$  — групповые константы,  $f^i(t)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $f(t)$  — произвольные гладкие функции.

Групповые константы связаны с параметрами модели системой классифицирующих уравнений

$$\begin{aligned}&(\beta_T(c_7 + 3c_4) + \beta_C c_8) \mathbf{g} + \beta_T \mathcal{G} \mathbf{c} = 0, \\ &(\beta_T c_9 + \beta_C(c_{10} + 3c_4)) \mathbf{g} + \beta_C \mathcal{G} \mathbf{c} = 0, \\ &(\beta_T(c_7 + c_4) + \beta_C c_8) \mathbf{e} + \beta_T \mathcal{E} \mathbf{c} = 0, \\ &(\beta_T c_9 + \beta_C(c_{10} + c_4)) \mathbf{e} + \beta_C \mathcal{E} \mathbf{c} = 0, \\ &\mathcal{D}_T \beta_C (e_1(c_4 + c_{10}) - e_2 c_1 - e_3 c_2) = 0, \\ &\mathcal{D}_T(c_{10} - c_7) + (\chi - \mathcal{D}) c_8 = 0, \\ &\mathcal{E}^* \mathbf{c} = 0, \quad \mathcal{D}_T c_9 = 0, \quad (\chi - \mathcal{D}) c_9 = 0,\end{aligned}\tag{3.52}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} -g_2 & -g_3 & 0 \\ g_1 & 0 & -g_3 \\ 0 & g_1 & g_2 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{E} &= \begin{pmatrix} -e_2 & -e_3 & 0 \\ e_1 & 0 & -e_3 \\ 0 & e_1 & e_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}^* = \begin{pmatrix} e_1^2 + e_2^2 & e_2 e_3 & -e_1 e_3 \\ e_2 e_3 & e_1^2 + e_3^2 & e_1 e_2 \\ -e_1 e_3 & e_1 e_2 & e_2^2 + e_3^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Исходя из формул (3.51) и системы (3.52), выделим алгебры операторов, допускаемые уравнениями модели в зависимости от значений входящих в нее параметров. Результаты групповой классификации представлены в Таблице 3.10.

Таблица 3.10. Результаты групповой классификации осредненных уравнений вибрационной конвекции.

Основная алгебра			$X_0, H_0, H_1, H_2, H_3, H_F, U_T, U_C$			
$D_T$	$\beta_T$	$\beta_C$	$\mathbf{g} \times \mathbf{e} \neq 0$	$\mathbf{g} \times \mathbf{e} = 0$	$\mathbf{g} = 0$	Дополнительные операторы
0	0	$\neq 0$	$T^1$	$T^1, X_R$	$T^1, X_R, Z_C$	$T^2 (\mathcal{D} = \chi)$
0	$\neq 0$	0	$C^1$	$C^1, X_R$	$C^1, X_R, Z_T$	$C^2 (\mathcal{D} = \chi)$
0	$\neq 0$	$\neq 0$	—	$X_R$	$X_R, Z$	$R_1, R_2 (\mathcal{D} = \chi)$
$\neq 0$	0	$\neq 0$	—	$X_R$	$X_R, Z$	—
$\neq 0$	$\neq 0$	0	$L$	$L, X_R$	$L, X_R,$	$Z (\mathcal{D} = \chi)$
					$Z_T^* (\mathcal{D} \neq \chi)$	
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	—	$X_R$	$X_R,$	$R_1,$
					$Z (\mathcal{D}_T \neq \mathcal{D}_T^*)$	$Z_C^* (\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_T^*)$

Операторы, указанные в таблице, имеют вид

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_{ij} = x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i} + u^i \frac{\partial}{\partial u^j} - u^j \frac{\partial}{\partial u^i} \quad (i < j),$$

$$X_R = e_3 X_{12} - e_2 X_{13} + e_1 X_{23},$$

$$H_i(f^i(t)) = f^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} + f_t^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i} - \rho_0 x^i f_{tt}^i(t) \frac{\partial}{\partial p}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$H_0(f^0(t)) = f_0(t) \frac{\partial}{\partial p}, \quad H_F(f(t)) = f(t) \frac{\partial}{\partial F},$$

$$Z_0 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) - 2p \frac{\partial}{\partial p}, \quad (3.53)$$

$$U_T = -\beta_T \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial T} + \beta_T \mathbf{e} \cdot \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial F},$$

$$U_C = -\beta_C \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial C} + \beta_C \mathbf{e} \cdot \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial F},$$

$$\begin{aligned}
T^1 &= T \frac{\partial}{\partial T}, & T^2 &= C \frac{\partial}{\partial T}, & C^1 &= C \frac{\partial}{\partial C}, & C^2 &= T \frac{\partial}{\partial C}, \\
R_1 &= T^1 - \frac{\beta_T}{\beta_C} C^2, & R_2 &= C^1 - \frac{\beta_C}{\beta_T} T^2, \\
Z_T &= Z_0 - T^1, & Z_C &= Z_0 - C^1, & Z &= Z_0 - T^1 - C^1, \\
Z_T^* &= Z_T + \frac{D_T}{D - \chi} C^2, & Z_C^* &= Z_C - \frac{D_T}{D - \chi} C^2, \\
L &= (D_T T + (D - \chi) C) \frac{\partial}{\partial C}.
\end{aligned}$$

Операторы  $X_0, H_0, H_1, H_2, H_3, H_F, U_T, U_C$  допускаются системой независимо от значений параметров и образуют основную алгебру Ли. Возможные расширения этой алгебры также представлены в таблице. В первых трех столбцах указаны значения постоянных  $D_T, \beta_T, \beta_C$ . Операторы, допускаемые системой в случаях, когда векторы  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{e}$  неколлинеарны, коллинеарны и когда вектор  $\mathbf{g} = 0$ , даны в следующих трех столбцах. В последнем столбце указаны дополнительные операторы, допускаемые системой в случаях  $D = \chi$  или  $D_T = D_T^*$ , где  $D_T^* = \beta_T(D - \chi)/\beta_C$ . Заметим, что в случае  $D_T \neq 0, \beta_T \neq 0, \beta_C = 0, \mathbf{g} = 0$  уравнения допускают оператор  $Z_T^*$  при  $D \neq \chi$ . Аналогично, если параметры  $D_T, \beta_T, \beta_C$  отличны от нуля, а  $\mathbf{g} = 0$ , то допускается оператор  $Z$  при  $D_T \neq D_T^*$ .

Опишем преобразования однопараметрических подгрупп, соответствующих операторам (3.53). Преобразования, порождаемые операторами  $X_0, X_{ij}, H_i, H_0, Z_0, T^1, T^2, C^1, C^2, R_1, R_2, L$  даются формулами (3.14). Далее, оператору  $X_R$  соответствует вращение в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{e}$ . Преобразования, соответствующие операторам  $H_F, U_T, U_C$ , имеют вид

$$\begin{aligned}
H_F(f(t)) : \quad \tilde{F} &= F + a f(t); \\
U_T : \quad \tilde{p} &= p - a \beta_T \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}, \quad \tilde{T} = T + a, \quad \tilde{F} = F + a \beta_T \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}; \\
U_C : \quad \tilde{p} &= p - a \beta_C \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}, \quad \tilde{C} = C + a, \quad \tilde{F} = F + a \beta_C \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Здесь  $a$  — параметр однопараметрических подгрупп, свой для каждого оператора.

тора. Переменные, закон преобразования которых не указан, преобразуются тождественно. Преобразования, порождаемые операторами  $Z$ ,  $Z_T$ ,  $Z_C$ ,  $Z_T^*$ ,  $Z_C^*$  получаются расширением однопараметрической подгруппы, соответствующей оператору  $Z_0$ , указанными ниже преобразованиями:

$$\begin{aligned} Z_T : \quad \tilde{T} &= e^{-a}T; & Z_C : \quad \tilde{C} &= e^{-a}C; \\ Z : \quad \tilde{T} &= e^{-a}T, \quad \tilde{C} = e^{-a}C; \\ Z_T^* : \quad \tilde{T} &= e^{-a}T, \quad \tilde{C} = C + \frac{aD_T}{D - \chi} T; \\ Z_C^* : \quad \tilde{C} &= e^{-a}C, \quad \tilde{C} = e^{-a}C + \frac{D_T}{D - \chi} (e^{-a} - 1) T. \end{aligned}$$

Заметим, что в рассмотренной задаче групповой классификации не учитывались преобразования эквивалентности параметров. С точки зрения приложений (т.е. построения точных решений и их физической интерпретации в различной геометрии), важно знать зависимость групповых свойств модели от полного набора физических параметров системы.

## **Глава 4**

# **Конвективная устойчивость многокомпонентных смесей**

Рассматривается задача об устойчивости механического равновесия многокомпонентной смеси в плоском слое, подогреваемом сверху или снизу в поле силы тяжести. Наличие градиента температуры приводит к разделению смеси под действием эффекта Соре. Принцип монотонности возмущений обобщен на случай многокомпонентной смеси для проницаемых границ слоя. Проведено исследование длинноволновых возмущений и найдены критические параметры неустойчивости для смесей с произвольным числом компонент. Выполнено сравнение аналитических и численных результатов для различных типов граничных условий (свободные/тверды, проницаемые/непроницаемые граници). Подробно исследованы случаи бинарной и тройной смесей. Данная задача является существенным обобщением знаменитой проблемы Рэлея–Бенара об устойчивости плоского слоя, подогреваемого снизу. В данной главе также изучена устойчивость стационарного конвективного движения многокомпонентной смеси в вертикальном слое, подогреваемом сбоку, относительно длинноволновых возмущений. Результаты главы основаны на работах [75, 84, 86, 93]. Обзор работ по тематике главы был дан в параграфе 1.2.

### **4.1 Устойчивость механического равновесия в плоском слое**

#### **4.1.1 Постановка задачи**

Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой, заполненный смесью из

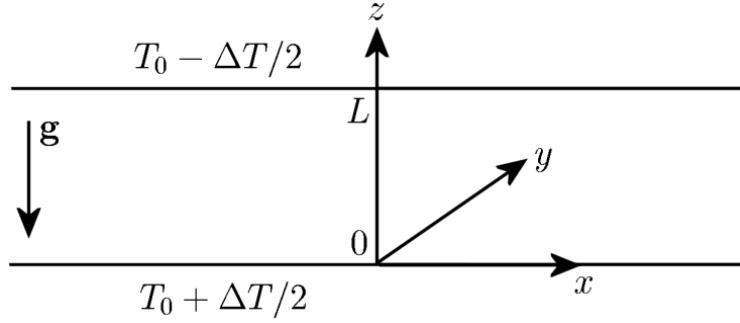


Рис. 4.1. Бесконечный горизонтальный слой.

$n$  компонент в поле силы тяжести (рис. 4.1). Слой ограничен двумя твердыми стенками  $z = 0$  и  $z = L$ , которые поддерживаются при постоянных температурах  $T_0 \pm \Delta T/2$ . Предполагается, что справедливо приближение Обербека–Буссинеска. Плотность смеси линейно зависит от температуры и концентрации компонентов согласно (2.31), а движение смеси описывается уравнениями (2.32) с учетом эффекта Соре. Заметим, что в уравнении переноса тепла не учитывается слагаемое, характеризующее эффект Дюфора (перенос тепла под действием градиента концентрации). В жидких смесях этот эффект пренебрежимо мал [137]. Экспериментальное и теоретическое исследование конвекции Рэлея–Бенара в ряде бинарных газовых смесей показало, что влияние эффекта Дюфора на значения критических параметров неустойчивости также крайне мало [291].

На горизонтальных стенах слоя ставятся условия прилипания и отсутствия диффузационного потока компонентов смеси, а также задается постоянная температура:

$$z = 0, L : \quad \mathbf{u} = 0, \quad T = T_0 \pm \frac{\Delta T}{2}, \quad D \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial z} + \mathbf{D}_T \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (4.1)$$

Случай  $\Delta T > 0$  соответствует подогреву снизу, а  $\Delta T < 0$  — подогреву сверху.

Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} t &= \frac{L^2}{\nu} t^*, & \mathbf{x} &= L \mathbf{x}^*, & \mathbf{u} &= \frac{\nu}{L} \mathbf{u}^*, \\ p &= \rho_0 \frac{\nu^2}{L^2} p^*, & T - T_0 &= \Delta T T^*, & \mathbf{C} - \mathbf{C}_0 &= \beta_T \Delta T B^{-1} \mathbf{C}^*, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \beta_T |\Delta T| \rho^*.$$

Отбрасывая для простоты верхние индексы у безразмерных переменных, запишем уравнения движения (2.32) в безразмерной форме

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \text{Pr}^{-1} \text{Ra} (T + \mathbf{I} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{e}_3, \\ \partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \text{Pr}^{-1} \nabla^2 T, \\ \partial_t \mathbf{C} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{C} &= \mathcal{SC} (\nabla^2 \mathbf{C} - \boldsymbol{\psi} \nabla^2 T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Система содержит следующие безразмерные параметры: число Рэлея  $\text{Ra} = g \beta_T \Delta T L^3 / \nu \chi$ , число Прандтля  $\text{Pr} = \nu / \chi$ , вектор отношений разделения

$$\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_{n-1}) = -\beta_T^{-1} B D^{-1} \mathbf{D}_T,$$

характеризующий эффект термодиффузии [70], и матрицу

$$\mathcal{SC} = \nu^{-1} B D B^{-1}, \quad \{\mathcal{SC}\}_{ij} = \frac{\beta_i}{\beta_j} \text{Sc}_{ij}^{-1}, \quad i, j = 1, \dots, n-1,$$

где  $\text{Sc}_{ij} = \nu / D_{ij}$  — числа Шмидта. Будем предполагать, что в качестве компонента  $n$  (растворителя) выбран наиболее тяжелый компонент, таким образом  $\beta_i > 0$  при  $i = 1, \dots, n-1$ . Если коэффициент теплового расширения  $\beta_T$  положителен (что справедливо для большинства жидкостей и газов), положительные (отрицательные) значения отношения разделения  $\psi_i$  соответствуют случаю, когда компонент  $i$  перемещается в более нагретую (более холодную) область в результате термодиффузии.

Границные условия (4.1) переписываются в безразмерных переменных следующим образом:

$$z = 0, 1 : \quad \mathbf{u} = 0, \quad T = \pm \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial z} - \boldsymbol{\psi} \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \tag{4.4}$$

В дальнейшем будем предполагать, что безразмерная диффузионная матрица является диагональной  $\mathcal{SC} = \text{diag}\{\text{Sc}_1^{-1}, \dots, \text{Sc}_{n-1}^{-1}\}$  или приведена к диагональному виду с помощью преобразования (3.36).

Задача (4.3), (4.4) имеет стационарное решение, описывающее состояние механического равновесия смеси в поле силы тяжести:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s &= 0, & p_s &= \frac{\text{Ra}(\Psi + 1)}{2\text{Pr}}(z - z^2), \\ T_s &= \frac{1}{2} - z, & \mathbf{C}_s &= \boldsymbol{\psi} \left( \frac{1}{2} - z \right), & \rho_s &= -\delta(\Psi + 1) \left( \frac{1}{2} - z \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь  $\Psi$  есть суммарное отношение разделения (2.26),  $\delta = 1$  ( $\delta = -1$ ) при подогреве снизу (сверху), индекс  $s$  означает стационарное решение. Разделение смеси вызвано эффектом термодиффузии. Указанное решение принадлежит к классу инвариантных решений ранга 1 относительно подгруппы, порождаемой операторами  $X_0 = \partial/\partial t$ ,  $H_1(1) = \partial/\partial x$ ,  $H_2(1) = \partial/\partial y$ , см. (3.13). В решениях этого класса все функции зависят только от  $z$ . Формулы (4.5) соответствуют частному случаю  $\mathbf{u} = 0$ .

Рассмотрим вопрос об устойчивости состояния равновесия (4.5). Введем малые возмущения согласно формуле

$$(\mathbf{u}, p, T, \mathbf{C}) = (\mathbf{u}_s, p_s, T_s, \mathbf{C}_s) + (\mathbf{u}', p', T', \mathbf{C}')$$

и линеаризуем уравнения (4.3) относительно состояния равновесия. С целью исключения давления  $p$  и компонент скорости  $u'$ ,  $v'$  из уравнения импульса применим к нему дважды оператор ротора и спроектируем полученное уравнение на ось  $z$ . Рассмотрим нормальные возмущения вида

$$(w', T', \mathbf{C}') = (\varphi(z), \theta(z), \boldsymbol{\xi}(z)) \exp(-\lambda t + i(k_x x + k_y y)), \quad (4.6)$$

где  $\lambda = \lambda_r + i\omega$  — комплексный декремент,  $k_x$ ,  $k_y$  — волновые числа в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно и  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})^T$ . Для удобства введем новый вектор  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\psi}\theta$  и подставим (4.6) в линеаризованные уравнения и граничные условия:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \varphi + \lambda \Delta \varphi - \text{Pr}^{-1} \text{Ra} k^2 ((\Psi + 1) \theta + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\eta}) &= 0, \\ \text{Pr}^{-1} \Delta \theta + \lambda \theta + \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\mathcal{SC} \Delta \boldsymbol{\eta} + \lambda(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\psi}\theta) + \boldsymbol{\psi}\varphi = 0,$$

$$z = 0, 1 : \quad \varphi = \varphi' = \theta = 0, \quad \boldsymbol{\eta}' = 0. \quad (4.8)$$

Здесь  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ , оператор  $\Delta = \partial_{zz} - k^2$ , а штрих соответствует производной  $\partial_z$ . Условие для производной  $\varphi'$  в (4.8) следует из уравнения неразрывности и условий прилипания для компонент скорости  $u'$ ,  $v'$ .

Заметим, что если  $\lambda$  есть собственное значение спектральной задачи (4.7)–(4.8), а  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\boldsymbol{\eta}$  есть собственные функции, то комплексно-сопряженная величина  $\bar{\lambda}$  также будет собственным значением, которому соответствуют собственные функции  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ . Следовательно, колебательные возмущения всегда появляются в виде двух волн, распространяющихся вдоль оси  $x$  в противоположных направлениях с безразмерными фазовыми скоростями  $\pm\omega/k$ .

Для задачи (4.7), (4.8) зависимость комплексного декремента  $\lambda$  от безразмерных параметров может быть найдена только численными методами. С целью получения простого точного решения спектральной задачи вместо условий (4.8) часто используют условия для свободных проницаемых границ [36, 150, 153]:

$$z = 0, 1 : \quad \varphi = \varphi'' = \theta = 0, \quad \boldsymbol{\eta} = 0. \quad (4.9)$$

Под проницаемыми понимаются границы, на которых возмущения концентрации обращаются в ноль ( $\boldsymbol{\xi} = 0$ ). Можно представить, что нижняя и верхняя границы слоя находятся в контакте с большими резервуарами, концентрация компонентов в которых соответствует значениям  $\mathbf{C}_s$  при  $z = 0$  и  $z = 1$  в состоянии механического равновесия (4.5). Конечно, указанные выше условия являются в известном смысле искусственными. Однако, они позволяют получить точное решение, из которого отчетливо видны наиболее важные особенности проблемы. В дальнейшем будет проведено сравнение результатов для обоих типов граничных условий.

#### 4.1.2 Принцип монотонности возмущений

Для чистых сред в конфигурации плоского слоя хорошо известен принцип монотонности возмущений (или принцип смены устойчивости): в случае подогрева снизу ( $Ra > 0$ ) возмущения нарастают или затухают монотонно, а в случае подогрева сверху ( $Ra < 0$ ) возмущения затухают со временем ( $\lambda_r > 0$ ) [36].

Этот результат справедлив как для свободных, так и для твердых границ.

Поставим вопрос об обобщении принципа монотонности возмущений на многокомпонентную смесь с эффектом Соре. Рассмотрим систему (4.7). Сделаем замену компонентов вектора  $\boldsymbol{\eta}$  и амплитуды возмущения температуры  $\theta$  по формулам

$$\tilde{\eta}_i = \eta_i + \frac{\psi_i}{1 - \text{Pr} \text{Sc}_i^{-1}} \theta, \quad (4.10)$$

$$\tilde{\theta} = \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\psi_i}{1 - \text{Sc}_i \text{Pr}^{-1}} \right) \theta \equiv \theta^* \theta. \quad (4.11)$$

Формулы (4.10) являются безразмерным аналогом преобразования (3.31) и позволяют исключить  $\theta$  из последнего уравнения системы (4.7) при условии  $\text{Sc}_i \neq \text{Pr}$ . Заметим, что в жидких смесях числа Шмидта значительно больше числа Прандтля, а в газовых смесях они примерно одного порядка. Точное совпадение чисел Прандтля и Шмидта для какой-либо реальной среды является маловероятным. Будем предполагать, что постоянная  $\theta^*$ , определяемая соотношением (4.11), отлична от нуля (случай  $\theta^* = 0$  будет рассмотрен отдельно ниже). В новых переменных амплитудные уравнения принимают вид (с учетом диагональности матрицы  $\mathcal{SC}$ ):

$$\Delta^2 \varphi + \lambda \Delta \varphi - \text{Pr}^{-1} \text{Ra} k^2 (\tilde{\theta} + \mathbf{I} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}}) = 0, \quad (4.12)$$

$$\text{Pr}^{-1} \Delta \tilde{\theta} + \lambda \tilde{\theta} + \theta^* \varphi = 0, \quad (4.13)$$

$$\text{Sc}_i^{-1} \Delta \tilde{\eta}_i + \lambda \tilde{\eta}_i + \psi_i^* \varphi = 0, \quad (4.14)$$

где

$$\psi_i^* = \frac{\psi_i}{1 - \text{Pr} \text{Sc}_i^{-1}}.$$

Дальнейшие рассуждения будут проведены для свободных проницаемых границ (условия (4.9)) или твердых проницаемых границ:

$$z = 0, 1 : \quad \varphi = \varphi' = \theta = 0, \quad \boldsymbol{\eta} = 0. \quad (4.15)$$

Тогда граничные условия для системы (4.12)–(4.14) получаются из условий (4.9) или (4.15) путем простой замены  $\theta \rightarrow \tilde{\theta}$  и  $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\eta}}$ . К сожалению, обобщить принцип монотонности возмущений на случай многокомпонентной смеси

с непроницаемыми границами не удается. В частности, после замены переменных (4.10) в граничном условии  $\boldsymbol{\eta}' = 0$  получается неоднородное условие относительно  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}'$ , что не позволяет получить необходимые соотношения (4.16)–(4.18) (см. ниже).

Отбросим для простоты черту  $\sim$  над  $\theta$  и  $\eta_i$  и умножим уравнения (4.12), (4.13), (4.14) на  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{\eta}_i$  соответственно (горизонтальная черта означает комплексное сопряжение). Интегрируя полученные уравнения по частям на интервале от  $z = 0$  до  $z = 1$  с учетом граничных условий (4.9) или (4.15), найдем

$$\begin{aligned} \lambda \int ((\varphi')^2 + k^2 \varphi^2) dz &= \\ = \int ((\varphi'')^2 + 2k^2(\varphi')^2 + k^4 \varphi^2) dz - \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} k^2 \int (\theta + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\eta}) \bar{\varphi} dz, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\lambda \int \theta^2 dz = \frac{1}{\text{Pr}} \int ((\theta')^2 + k^2 \theta^2) dz - \theta^* \int \bar{\theta} \varphi dz, \quad (4.17)$$

$$\lambda \int \eta_i^2 dz = \frac{1}{\text{Sc}_i} \int ((\eta'_i)^2 + k^2 \eta_i^2) dz - \psi^* \int \bar{\eta}_i \varphi dz. \quad (4.18)$$

В этих формулах (а также во всех формулах ниже) пределы интегрирования для краткости опущены. Вычтем из уравнений (4.16)–(4.18) их комплексно-сопряженные:

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int ((\varphi')^2 + k^2 \varphi^2) dz = \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} k^2 \int ((\bar{\theta} + \mathbf{I} \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}}) \varphi - (\theta + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\eta}) \bar{\varphi}) dz, \quad (4.19)$$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int \theta^2 dz = \theta^* \int (\theta \bar{\varphi} - \bar{\theta} \varphi) dz, \quad (4.20)$$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int \eta_i^2 dz = \psi_i^* \int (\eta_i \bar{\varphi} - \bar{\eta}_i \varphi) dz. \quad (4.21)$$

Умножим уравнение (4.20) на  $\text{Ra} k^2 (\text{Pr} \theta^*)^{-1}$ , уравнения (4.21) на  $\text{Ra} k^2 (\text{Pr} \psi_i^*)^{-1}$  для  $i = 1, \dots, n - 1$  и сложим полученные соотношения с (4.19):

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int \left[ (\varphi')^2 + k^2 \varphi^2 + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} k^2 \left( \frac{\theta^2}{\theta^*} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\eta_i^2}{\psi_i^*} \right) \right] dz = 0. \quad (4.22)$$

Далее, сложим уравнения (4.16)–(4.18) с их комплексно-сопряженными:

$$(\lambda + \bar{\lambda}) \int ((\varphi')^2 + k^2 \varphi^2) dz = 2 \int ((\varphi'')^2 + 2k^2(\varphi')^2 + k^4 \varphi^2) dz -$$

$$-\frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} k^2 \int ((\bar{\theta} + \mathbf{I} \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}}) \varphi + (\theta + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\eta}) \bar{\varphi}) dz, \quad (4.23)$$

$$(\lambda + \bar{\lambda}) \int \theta^2 dz = \frac{2}{\text{Pr}} \int ((\theta')^2 + k^2 \theta^2) dz - \theta^* \int (\theta \bar{\varphi} + \bar{\theta} \varphi) dz, \quad (4.24)$$

$$(\lambda + \bar{\lambda}) \int \eta_i^2 dz = \frac{2}{\text{Sc}_i} \int ((\eta'_i)^2 + k^2 \eta_i^2) dz - \psi_i^* \int (\eta_i \bar{\varphi} + \bar{\eta}_i \varphi) dz. \quad (4.25)$$

Умножим уравнение (4.24) на  $\text{Ra} k^2 (\text{Pr} \theta^*)^{-1}$ , уравнения (4.25) на  $\text{Ra} k^2 (\text{Pr} \psi_i^*)^{-1}$  для  $i = 1, \dots, n-1$  и вычтем полученные соотношения из (4.23):

$$\begin{aligned} & (\lambda + \bar{\lambda}) \int \left[ (\varphi')^2 + k^2 \varphi^2 - \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} k^2 \left( \frac{\theta^2}{\theta^*} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\eta_i^2}{\psi_i^*} \right) \right] dz = \\ & = 2 \int \left[ (\varphi'')^2 + 2k^2(\varphi')^2 + k^4 \varphi^2 - \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} k^2 \left( \frac{(\theta')^2 + k^2 \theta^2}{\text{Pr} \theta^*} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\eta'_i)^2 + k^2 \eta_i^2}{\text{Sc}_i \psi_i^*} \right) \right] dz. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Анализ областей значений параметров  $\text{Ra}$ ,  $\theta^*$ ,  $\psi_i^*$ , в которых подынтегральные выражения в (4.22) или в (4.26) строго положительны, приводит к следующей теореме, обобщающей принцип монотонности возмущений на случай многокомпонентной смеси с эффектом Соре.

**Теорема 4.1.** Пусть выполнены условия

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\psi_i}{1 - \text{Sc}_i \text{Pr}^{-1}} > 0 \quad \text{и} \quad \psi_i > 0, \text{ если } \text{Sc}_i > \text{Pr}, \quad (4.27)$$

$$\psi_i < 0, \text{ если } \text{Sc}_i < \text{Pr} \quad (4.28)$$

для  $i = 1, \dots, n-1$ . Тогда при подогреве снизу ( $\text{Ra} > 0$ ) возмущения нарастают или затухают монотонно ( $\omega = 0$ ), а при подогреве сверху ( $\text{Ra} < 0$ ) возмущения затухают ( $\lambda_r > 0$ ).

Для случая бинарной смеси с отношением разделения  $\Psi$  Теорема 4.1 принимает следующий вид.

**Теорема 4.2.** Пусть выполнены условия

$$0 < \Psi < \text{Sc} \text{Pr}^{-1} - 1, \quad \text{если } \text{Sc} > \text{Pr}, \quad (4.29)$$

$$\text{Sc} \text{Pr}^{-1} - 1 < \Psi < 0, \quad \text{если } \text{Sc} < \text{Pr}. \quad (4.30)$$

Тогда при подогреве снизу ( $\text{Ra} > 0$ ) возмущения нарастают или затухают

монотонно ( $\omega = 0$ ), а при подогреве сверху ( $\text{Ra} < 0$ ) возмущения затухают ( $\lambda_r > 0$ ).

Приведенные здесь теоремы дают достаточные условия устойчивости при подогреве сверху и монотонности возмущений при подогреве снизу. В действительности области устойчивости и монотонности возмущений в пространстве параметров могут быть шире по сравнению с областями, определяемыми указанными выше неравенствами. Например, при подогреве слоя бинарной смеси сверху ( $\text{Ra} < 0$ ) система, очевидно, будет устойчива, если легкий компонент концентрируется у нагретой границы ( $\Psi > 0$ ) независимо от значений чисел Прандтля и Шмидта. Эта область устойчивости шире, чем та, которая определяется неравенствами (4.29). С другой стороны, из неравенств (4.30) следует, что система также будет устойчивой при подогреве сверху в области отрицательных  $\Psi$ , если  $\text{Sc} < \text{Pr}$ . Этот результат не так очевиден с первого взгляда, так как в этом случае у нагретой границы концентрируется тяжелый компонент и дестабилизирует систему. Заметим, что отношение числа Шмидта к числу Прандтля можно интерпретировать как отношение характерного времени диффузии к характерному времени теплопроводности:

$$\frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} = \frac{L^2/D}{L^2/\chi},$$

где  $L$  — характерный размер. При  $\text{Sc} < \text{Pr}$  возмущения концентрации рассасываются быстрее, чем возмущения температуры. Поэтому система остается устойчивой даже при наличии дестабилизирующего градиента концентрации, если он не слишком большой (модуль  $\Psi$  не превышает модуля  $\text{Sc}\text{Pr}^{-1} - 1$ ).

Случай многокомпонентной смеси интерпретируется аналогичным образом. Напомним, что при положительных (отрицательных)  $\psi_i$  легкие компоненты концентрируются у нагретой (холодной) границы. Теорема 4.1 позволяет оценить области устойчивости и монотонности возмущений в пространстве параметров. Сравнение этих результатов с численными расчетами для бинарных и тройных смесей в слое с непроницаемыми границами будет проведено в пунктах 4.1.5—4.1.6.

В заключение рассмотрим случай  $\theta^* = 0$ , см. (4.11). Замена переменных

по формулам (4.10) приводит к системе уравнений

$$\Delta^2\varphi + \lambda\Delta\varphi - \text{Pr}^{-1}\text{Ra}k^2\mathbf{I}\cdot\tilde{\boldsymbol{\eta}} = 0, \quad (4.31)$$

$$\text{Pr}^{-1}\Delta\theta + \lambda\theta + \varphi = 0, \quad (4.32)$$

$$\text{Sc}_i^{-1}\Delta\tilde{\eta}_i + \lambda\tilde{\eta}_i + \psi_i^*\varphi = 0. \quad (4.33)$$

Уравнения (4.31) и (4.33) образуют независимую подсистему. Из них можно получить соотношения (4.22) и (4.26), в которых следует опустить члены  $\theta^2/\theta^*$  и  $(\theta')^2/\theta^*$ . Из первого соотношения следует, что возмущения нарастают или затухают монотонно, если  $\text{Ra}\psi_i^* > 0$ , а из второго соотношения следует, что все возмущения затухают, если  $\text{Ra}\psi_i^* < 0$  для  $i = 1, \dots, n-1$ . Отсюда легко получить неравенства для  $\text{Ra}$ ,  $\psi_i$ ,  $\text{Pr}$ ,  $\text{Sc}_i$ . Так как случай  $\theta^* = 0$  не представляет особого физического интереса, эти неравенства здесь не приводятся.

**Замечание.** Можно показать, что принцип монотонности возмущений (Теорема 4.1) справедлив для замкнутой полости произвольной формы при условии, что распределения температуры и концентрации в состоянии равновесия имеют вид (4.5), а возмущения скорости, температуры и концентрации на границах исчезают (случай твердых изотермических проницаемых границ). Теорема 4.1 также остается справедливой для нормальных возмущений, которые пропорциональны  $\exp(-\lambda t)$  и произвольно зависят от пространственных координат.

### 4.1.3 Решение для свободных проницаемых границ

Перепишем амплитудные уравнения (4.7) в координатной форме с учетом диагональности матрицы  $\mathcal{SC}$  и поставим условия на свободных проницаемых границах:

$$\Delta^2\varphi + \lambda\Delta\varphi - \text{Pr}^{-1}\text{Ra}k^2((\Psi+1)\theta + \eta_1 + \dots + \eta_{n-1}) = 0, \quad (4.34)$$

$$\text{Pr}^{-1}\Delta\theta + \lambda\theta + \varphi = 0, \quad (4.35)$$

$$\text{Sc}_i^{-1}\Delta\eta_i + \lambda\eta_i - \text{Pr}^{-1}\psi_i\Delta\theta = 0, \quad (4.36)$$

$$z = 0, 1 : \quad \varphi = \varphi'' = \theta = \eta_i = 0, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (4.37)$$

Последовательно применим операторы  $\prod_{i=1}^{n-1} (\text{Sc}_i^{-1} \Delta + \lambda)$  и  $\text{Pr}^{-1} \Delta + \lambda$  к уравнению (4.34), используя (4.35) и (4.36). В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение 2n + 4 порядка на функцию  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{n-1} (\text{Sc}_i^{-1} \Delta + \lambda) \left( (\text{Pr}^{-1} \Delta + \lambda)(\Delta^2 \varphi + \lambda \Delta \varphi) + \text{Pr}^{-1} \text{Ra} k^2 (\Psi + 1) \varphi \right) + \\ & + \text{Pr}^{-2} \text{Ra} k^2 \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i \prod_{j=1, j \neq i}^{n-1} (\text{Sc}_j^{-1} \Delta + \lambda) \Delta \varphi = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Последовательным дифференцированием уравнений (4.34)–(4.36) с учетом граничных условий (4.37) найдем, что все четные производные функции  $\varphi$  на границах обращаются в ноль:

$$z = 0, 1 : \quad \varphi^{(2i)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.39)$$

Задача (4.38), (4.39) имеет простое решение:

$$\varphi = \sin m\pi z, \quad m = 1, 2, \dots. \quad (4.40)$$

Подставляя (4.40) в (4.38), получим характеристическое уравнение на  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda - q \text{Sc}_i^{-1}) \left( (\lambda - q \text{Pr}^{-1})(q^2 - \lambda q) + \text{Pr}^{-1} \text{Ra} k^2 (\Psi + 1) \right) - \\ & - q \text{Pr}^{-2} \text{Ra} k^2 \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i \prod_{j=1, j \neq i}^{n-1} (\lambda - q \text{Sc}_j^{-1}) = 0, \end{aligned}$$

где  $q = (m\pi)^2 + k^2$ . Для определения границы устойчивости положим  $\lambda = i\omega$  и найдем минимум  $\text{Ra}$  по  $m$  и  $k$ . В результате получаются следующие значения критических параметров

$$\text{Ra} = \text{Ra}_c \text{Ra}_*, \quad k = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad \omega = \frac{3\pi^2}{2} \omega_*.$$

Здесь  $\text{Ra}_c = 27\pi^4/4$  есть критическое число Рэлея для однокомпонентной среды, а  $\text{Ra}_*$  и  $\omega_*$  удовлетворяют системе уравнений

$$\text{Ra}_* \left( \text{Pr}(\Psi + 1) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\psi_i \text{Sc}_i^{-1}}{\omega_*^2 + \text{Sc}_i^{-2}} \right) + \text{Pr}(\omega_*^2 \text{Pr} - 1) = 0, \quad (4.41)$$

$$\omega_* \left( \text{Pr}(\text{Pr} + 1) + \text{Ra}_* \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\psi_i}{\omega_*^2 + \text{Sc}_i^{-2}} \right) = 0. \quad (4.42)$$

Если выражение в скобках в уравнении (4.42) положительно, то  $\omega = 0$  на границе устойчивости.

**Теорема 4.3.** На границе устойчивости декремент  $\lambda$  является вещественным ( $\omega = 0$  при  $\lambda_r = 0$ ), если выполнены условия:

1.  $\text{Ra} > 0$  (подогрев снизу) и  $\psi_i > 0$  для  $i = 1, \dots, n - 1$ ;
2.  $\text{Ra} < 0$  (подогрев сверху) и  $\psi_i < 0$  для  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Критическое число Рэлея  $\text{Ra}^m$  для монотонной неустойчивости определяется из (4.41), где следует положить  $\omega_* = 0$ :

$$\frac{\text{Ra}^m}{\text{Ra}_c} = \text{Pr} \left( \text{Pr}(\Psi + 1) + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i \text{Sc}_i \right)^{-1}.$$

Критическое число Рэлея  $\text{Ra}^o$  для колебательной неустойчивости определяется из (4.42) в предположении  $\omega_* \neq 0$ :

$$\frac{\text{Ra}^o}{\text{Ra}_c} = -\text{Pr}(\text{Pr} + 1) \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\psi_i}{\omega_*^2 + \text{Sc}_i^{-2}} \right)^{-1}.$$

Подставляя правую часть этого равенства вместо  $\text{Ra}_*$  в (4.41), найдем уравнение для  $\omega_*$ :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \psi_i \frac{\omega_*^2 \text{Pr} - 1 - (\text{Pr} + 1) \text{Sc}_i^{-1}}{\omega_*^2 + \text{Sc}_i^{-2}} - \text{Pr}(\text{Pr} + 1)(\Psi + 1) = 0.$$

Для бинарной смеси ( $n = 2$ ) критическое число Рэлея для монотонной неустойчивости дается формулой

$$\frac{\text{Ra}^m}{\text{Ra}_c} = \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}(\Psi + 1) + \Psi \text{Sc}}, \quad (4.43)$$

Критические параметры для колебательной неустойчивости имеют вид

$$\frac{\text{Ra}^o}{\text{Ra}_c} = \frac{(\text{Pr} + 1)(\text{Sc} + 1)(\text{Sc} + \text{Pr})}{\text{Sc}^2(\text{Pr}(\Psi + 1) + 1)}, \quad (4.44)$$

$$\omega = \frac{3\pi^2}{2} \sqrt{-\frac{(\text{Pr}^2 + (\text{Sc} + 1)(\text{Sc} + \text{Pr})) \Psi + \text{Pr}(\text{Pr} + 1)}{\text{Pr} \text{Sc}^2(\text{Pr}(\Psi + 1) + 1)}}. \quad (4.45)$$

Конвективная неустойчивость плоского слоя бинарной смеси с эффектом Соре изучена достаточно подробно как теоретически, так и экспериментально [136–142]. Ниже будут приведены примеры карт устойчивости и описаны

основные механизмы возникновения конвекции в бинарных смесях. Эти сведения служат основой для понимания и изучения более сложного случая многокомпонентных смесей.

Определим области существования монотонной и колебательной неустойчивости в бинарной смеси. Введем следующие обозначения:

$$\Psi_m = -\left(1 + \frac{Sc}{Pr}\right)^{-1}, \quad (4.46)$$

$$\Psi_{o1} = -1 - \frac{1}{Pr}, \quad \Psi_{o2} = -\left(1 + \frac{Sc}{Pr} + \frac{Sc^2}{Pr(Pr+1)}\right)^{-1}.$$

Данные параметры удовлетворяют неравенству  $\Psi_{o1} < -1 < \Psi_m < \Psi_{o2} < 0$ . Анализ выражений для критических параметров показывает, что при подогреве снизу ( $Ra > 0$ ) монотонная неустойчивость наиболее опасна в области  $\Psi_{o2} \leq \Psi < \infty$ , а колебательная неустойчивость — в области  $\Psi_{o1} < \Psi < \Psi_{o2}$ . При подогреве сверху ( $Ra < 0$ ) имеет место монотонная неустойчивость в области  $-\infty < \Psi < \Psi_m$ .

Пример карты устойчивости для бинарных смесей показан на рис. 4.2. Рассмотрим вначале случай  $Pr = 10$ ,  $Sc = 1000$  (кривые 1—3). Эти значения параметров типичны для жидкых смесей. Границы областей неустойчивости определяются параметрами  $\Psi_{o1} = -1.1$ ,  $\Psi_m = -0.0099$ ,  $\Psi_{o2} = -0.000109$ .

Пусть слой подогревается снизу ( $Ra > 0$ ). Если эффект Соре отсутствует ( $\Psi = 0$ ), то критическое число Рэлея  $Ra = Ra_c = 27\pi^4/4$  соответствует слою однокомпонентной среды. При  $\Psi > -0.000109$  неустойчивость является монотонной (кривая 1). Нормальный эффект Соре ( $\Psi > 0$ ) приводит к резкому уменьшению критического числа Рэлея, так как градиент концентрации легкого компонента направлен в сторону нагретой границы (вниз), см. также выражение для плотности в решении (4.5). Монотонность возмущений можно пояснить следующими соображениями [36]. Пусть небольшой элемент жидкости в результате случайного возмущения сместился вверх. Температура этого элемента и концентрация легкого компонента в нем выше, чем в окружающей жидкости. Благодаря процессам диффузии и теплопроводности разности температур и концентраций между элементом и его окружением будут со врем-

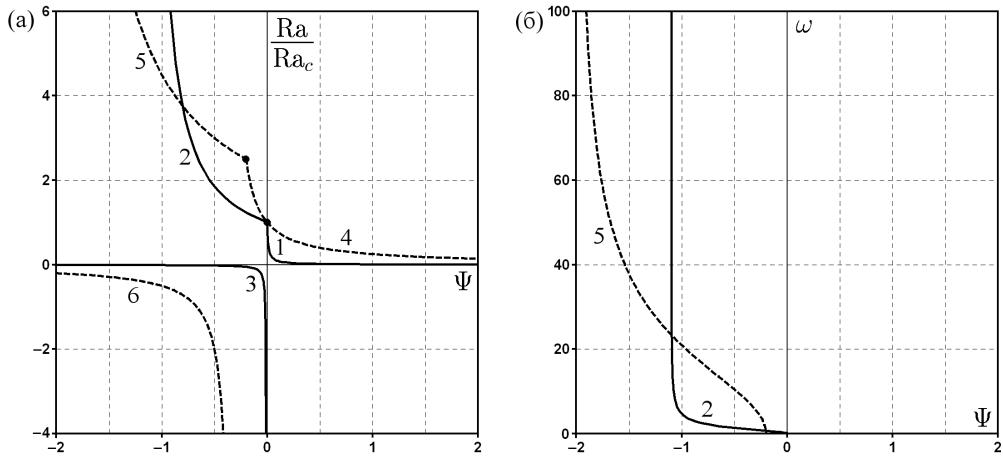


Рис. 4.2. Зависимость критического числа Рэлея (а) и критической частоты (б) от отношения разделения  $\Psi$  для бинарных смесей с  $\text{Pr} = 10$ ,  $\text{Sc} = 1000$  (сплошные линии) и  $\text{Pr} = 1$ ,  $\text{Sc} = 2$  (штриховые линии). Кривые 1, 3, 4, 6 описывают границу монотонной неустойчивости, кривые 2, 5 — колебательной неустойчивости.

менем уменьшаться. Так как плотность элемента все это время будет меньше плотности его окружения, он будет продолжать всплывать, преодолевая вязкое сопротивление. Будет ли это движение затухать или развиваться — зависит от соотношения между градиентами температуры и концентрации и параметрами диссипации. Во всяком случае, это возмущение имеет монотонный характер из-за отсутствия "возвращающей" силы. При аномальном эффекте Соре ( $\Psi < 0$ ) градиент концентрации легкого компонента направлен в сторону холодной границы (вверх). В результате критическое число Рэлея повышается, при этом неустойчивость становится колебательной и имеет место в области  $-1.1 < \Psi < -0.000109$ . Для объяснения этого результата рассмотрим малый элемент жидкости, сместившийся вверх в результате случайного возмущения. Температура этого элемента выше температуры окружающей жидкости, а концентрация легкого компонента в нем — ниже. Однако, плотность элемента все же меньше плотности его окружения (при  $-1 < \Psi < 0$ ), и он будет продолжать всплывать. Так как в данном случае  $\text{Sc} \gg \text{Pr}$ , то выравнивание температуры между элементом и его окружением происходит гораздо быстрее, чем выравнивание концентрации. После установления теплового равновесия плотность элемента станет больше плотности окружающей жидкости,

и он начнет опускаться вниз. Наличие такой "возвращающей" силы вызывает колебания. С ростом модуля  $\Psi$  степень разделения смеси увеличивается, что приводит к увеличению частоты колебаний (рис. 4.2 (б), кривая 2). Заметим, что при  $\Psi < -1$  полный градиент плотности становится стабилизирующим, см. (4.5). Однако, неустойчивость может иметь место и в этой области, если число Рэлея достаточно велико (так как градиент плотности, вызванный градиентом температуры, дестабилизирует систему).

Пусть слой подогревается сверху ( $\text{Ra} < 0$ ). При нормальном эффекте Соре ( $\Psi > 0$ ) градиент концентрации легкого компонента направлен в сторону нагретой границы, и система является устойчивой. Аномальный эффект Соре приводит к появлению монотонной неустойчивости в области  $\Psi < -0.0099$  благодаря тому, что вблизи нагретой границы (вверху) накапливается тяжелый компонент (кривая 3). Заметим, что неустойчивость при подогреве сверху имеет место и в том случае, когда полный градиент плотности является стабилизирующим ( $-1 < \Psi < -0.0099$ ). Рассмотрим жидкий элемент, сместившийся вниз под действием случайного возмущения. Так как неоднородности температуры выравниваются быстрее, чем неоднородности концентрации, этот элемент будет быстро охлаждаться, но достаточно медленно восполнять недостаток легкой компоненты. При подходящем соотношении градиентов температуры и концентрации плотность элемента после выравнивания температуры может оказаться больше плотности его окружения, и он будет продолжать тонуть. Следовательно, возможна монотонная неустойчивость.

В дальнейшем нам будут полезны результаты, соответствующие предельному случаю  $\text{Sc}/\text{Pr} \rightarrow \infty$  [31]. Из (4.43)–(4.46) следует  $\text{Ra}^m = \Psi^m = \Psi_{o2} = 0$  и

$$\frac{\text{Ra}^o}{\text{Ra}_c} = \frac{\text{Pr} + 1}{\text{Pr}(\Psi + 1) + 1}, \quad \omega = \frac{3\pi^2}{2} \sqrt{-\frac{\Psi}{\text{Pr}^2(\Psi + 1) + \text{Pr}}}. \quad (4.47)$$

Перейдем теперь к случаю  $\text{Pr} = 1$ ,  $\text{Sc} = 2$  (кривые 4–6 на рис. 4.2). Такие значения параметров типичны для газовых смесей. Зависимость критического числа Рэлея от отношения разделения  $\Psi$  имеет качественное сходство с рассмотренным выше случаем жидких смесей. Однако, величина кри-

тического числа Рэлея здесь существенно возрастает. Граница между монотонной (кривая 4) и колебательной неустойчивостью (кривая 5) при подогреве снизу смещается в сторону отрицательных значений отношения разделения ( $\Psi_{o2} = -1/5$ ), а безразмерная частота колебаний увеличивается. Область монотонной неустойчивости при подогреве сверху смещается вправо ( $\Psi < \Psi_m = -1/3$ ), см. кривую 6. Принимая во внимание описанные выше механизмы неустойчивости, нетрудно понять, что все эти изменения связаны с тем, что в газовых смесях характерные времена теплопроводности и диффузии являются величинами одного порядка. Заметим, что область колебательной неустойчивости (кривая 5) при подогреве снизу расширяется ( $-2 < \Psi < -1/3$ ) по сравнению со случаем жидких смесей (кривая 2). Это связано с тем, что характерное время теплопроводности и вязкой диссипации в газах являются величинами одного порядка:

$$\text{Pr} = \frac{L^2/\chi}{L^2/\nu} \sim 1.$$

В жидкостях возмущения скорости затухают значительно быстрее, чем возмущения температуры, поэтому область колебательной неустойчивости там уже.

В заключение остановимся на случае, когда характерное время диффузии значительно меньше характерного времени теплопроводности. Таким образом, возмущения температуры быстро приводят к возникновению возмущений концентрации благодаря эффекту Соре. В пределе  $\text{Sc}/\text{Pr} \rightarrow 0$  из (4.43)–(4.46) будем иметь

$$\frac{\text{Ra}^m}{\text{Ra}_c} = \frac{1}{\Psi + 1},$$

$\Psi_m = \Psi_{o2} = -1$  и  $\text{Ra}^o, \omega \rightarrow \infty$ . Здесь колебательная неустойчивость исчезает, а монотонная неустойчивость возникает только тогда, когда полный градиент плотности является дестабилизирующим, см. (4.5). Это имеет место в области  $-\infty < \Psi < -1$  при подогреве сверху и в области  $-1 < \Psi < \infty$  при подогреве снизу.

Описанные выше механизмы неустойчивости естественным образом переносятся на многокомпонентные смеси при условии, что все отношения разде-

ления  $\psi_i$  имеют одинаковые знаки. Это позволяет понять физический смысл результатов в Теоремах 4.1—4.3.

#### 4.1.4 Решение для твердых непроницаемых границ

Перейдем к рассмотрению случая твердых непроницаемых границ, который соответствует реальному физическому эксперименту. Особенностью конвекции Рэлея–Бенара в плоском слое бинарной смеси с эффектом Соре является существование длинноволновой неустойчивости [137]. Такой тип неустойчивости характерен для жидких смесей и возникает при подогреве снизу и нормальном эффекте Соре ( $\text{Ra} > 0, \Psi > 0$ ), а также при подогреве сверху и аномальном эффекте Соре ( $\text{Ra} < 0, \Psi < 0$ ), см. рис. 4.2. В обоих случаях градиент плотности, вызванный градиентом концентрации, является дестабилизирующим и приводит к возникновению движения. В условиях, когда характерное время диффузии гораздо больше характерного времени теплопроводности и границы слоя непроницаемы для вещества, движение возникает в виде ячеек, продольный размер которых сравним с продольным размером полости (длинные волны). Скорость конвекции при этом очень мала и распределение температуры в слое практически не отличается от состояния механического равновесия. Заметим, что в классической неустойчивости Рэлея–Бенара, вызванной дестабилизирующим градиентом температуры, продольный размер ячеек сравним с поперечным размером полости. Длинноволновая неустойчивость в смесях с тремя и большим числом компонент до настоящего времени не изучалась.

Для исследования длинноволновой неустойчивости будем использовать метод разложения по малому параметру (волновому числу  $k$ ). Расчет спектра комплексных декрементов для произвольных значений волнового числа проводится методом пошагового интегрирования с ортогонализацией [37, 292], при этом используется схема Рунге–Кутты–Мерсона 5 порядка точности.

Рассмотрим амплитудные уравнения (4.7) с граничными условиями (4.8). Для определения границ устойчивости относительно длинноволновых возму-

щений положим  $\lambda = i\omega$ . Будет искать решение в виде ряда по четным степеням волнового числа  $k$  (так как амплитудные уравнения содержат лишь степени  $k^2$ ):

$$(\varphi, \theta, \boldsymbol{\eta}, \text{Ra}, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} (\varphi_m, \theta_m, \boldsymbol{\eta}_m, \text{Ra}_m, \omega_m) k^{2m}.$$

Подставляя это разложение в уравнения (4.7) и приравнивая к нулю множители при степенях  $k$ , получим серию систем уравнений на коэффициенты разложения (границные условия для всех систем совпадают с (4.8)). Система нулевого порядка имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_0''' + i\omega_0 \varphi_0'' &= 0, \\ \text{Pr}^{-1} \theta_0'' + i\omega_0 \theta_0 + \varphi_0 &= 0, \\ \mathcal{SC} \boldsymbol{\eta}_0'' + i\omega_0 (\boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\psi} \theta_0) + \boldsymbol{\psi} \varphi_0 &= 0.\end{aligned}$$

Анализ данной системы показывает, что все собственные функции соответствуют затухающим возмущениям за исключением нейтральных возмущений концентрационного типа:

$$\omega_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \theta_0 = 0, \quad \boldsymbol{\eta}_0 = \text{const}. \quad (4.48)$$

Здесь  $\boldsymbol{\eta}_0$  есть постоянный вектор. С учетом (4.48) система первого порядка принимает вид

$$\begin{aligned}\varphi_1''' - \text{Pr}^{-1} \text{Ra}_0 \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 &= 0, \\ \text{Pr}^{-1} \theta_1'' + \varphi_1 &= 0, \\ \mathcal{SC} (\boldsymbol{\eta}_1'' - \boldsymbol{\eta}_0) + i\omega_1 \boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\psi} \varphi_1 &= 0.\end{aligned}$$

Определим  $\varphi_1$  из первого уравнения и подставим полученное выражение в последнее уравнение. Интегрируя его на интервале от  $z = 0$  до  $z = 1$  с учетом граничных условий (4.8), получим

$$\left( \mathcal{SC} - i\omega_1 E - \frac{\text{Ra}_0}{720 \text{Pr}} \Upsilon \right) \boldsymbol{\eta}_0 = 0. \quad (4.49)$$

Здесь  $E$  — единичная матрица,  $\Upsilon$  — квадратная матрица, каждый столбец которой совпадает с вектором отношений разделения  $\boldsymbol{\psi}$ . При выводе указанного соотношения использовалась формула  $\boldsymbol{\psi} \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 = \Upsilon \boldsymbol{\eta}_0$ . Решение системы

первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\text{Ra}_0}{24\text{Pr}}(z^4 - 2z^3 + z^2) \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\eta}_0, \\ \theta_1 &= \frac{\text{Ra}_0}{1440}(-2z^6 + 6z^5 - 5z^4 + z) \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\eta}_0, \\ \boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\text{Ra}_0}{1440 \text{Pr}}(-2z^6 + 6z^5 - 5z^4 + z^2 - 3/32) \mathcal{SC}^{-1} \Upsilon \boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\eta}_1^*,\end{aligned}\quad (4.50)$$

где  $\boldsymbol{\eta}_1^*$  есть постоянный вектор. Из (4.49) следует, что ненулевое решение для вектора  $\boldsymbol{\eta}_0$  существует, если определитель матрицы системы равен нулю. Из этого условия определяются  $\text{Ra}_0$  и  $\omega_1$ . Эти величины также можно определить другим способом, который более удобен для нахождения последующих приближений. Система (4.49) содержит  $n-1$  уравнение относительно неизвестных компонент вектора  $\boldsymbol{\eta}_0 = (\eta_{01}, \dots, \eta_{0,n-1})$ . В силу диагональности матрицы  $\mathcal{SC}$  элементы матрицы системы (4.49) имеют вид  $A_{ij} = a_i + \delta_{ij} b_i$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Определитель такой матрицы дается формулой

$$\det A = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \prod_{j=1, j \neq i}^{n-1} b_j + \prod_{j=1}^{n-1} b_j. \quad (4.51)$$

Отбросим последнее уравнение в системе (4.49) и решим оставшиеся уравнения относительно величин  $\eta_{01}, \dots, \eta_{0,n-2}$  методом Крамера, используя формулу (4.51). Подставляя найденное решение в последнее уравнение, получим

$$1 - \frac{\text{Ra}_0}{720\text{Pr}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\psi_j(i\omega_1 + \text{Sc}_j^{-1})}{\omega_1^2 + \text{Sc}_j^{-2}} = 0. \quad (4.52)$$

Приравнивая действительную и мнимую части (4.52) к нулю, найдем критические параметры монотонной неустойчивости

$$\text{Ra}_0^m = 720 \text{Pr} \left( \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j \text{Sc}_j \right)^{-1}, \quad \omega_1 = 0 \quad (4.53)$$

и колебательной неустойчивости

$$\text{Ra}_0^o = 720 \text{Pr} \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\psi_j \text{Sc}_j^{-1}}{\omega_1^2 + \text{Sc}_j^{-2}} \right)^{-1}, \quad (4.54)$$

где  $\omega_1$  является корнем уравнения

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\psi_j}{\omega_1^2 + Sc_j^{-2}} = 0. \quad (4.55)$$

Заметим, что данное уравнение не имеет решения, если отношения разделения компонентов  $\psi_j$  имеют одинаковые знаки, а также в случаях, когда все числа Шмидта одинаковы или  $n = 2$  (тогда из (4.55) следует, что суммарное отношение разделения  $\Psi = 0$  и  $Ra_0^0$  обращается в бесконечность). Таким образом, длинноволновая колебательная неустойчивость может существовать только в смесях с тремя и большим числом компонент, которые имеют различные диффузационные и термодиффузационные свойства (часть компонентов концентрируется в более нагретых областях, а другая часть — в более холодных областях под действием термодиффузии). Уравнение (4.55) можно переписать в виде полинома степени  $n - 2$  относительно  $\omega_1^2$ . Таким образом, для смеси из  $n$  компонент может существовать до  $n - 2$  критических чисел Рэлея, определяющих границу длинноволновой колебательной неустойчивости.

Решение системы (4.49) дается формулами

$$\eta_{0,j} = \frac{\psi_j (Sc_{n-1}^{-1} - i\omega_1)}{\psi_{n-1} (Sc_j^{-1} - i\omega_1)} \eta_{0,n-1}, \quad j = 1, \dots, n-2, \quad (4.56)$$

где  $\eta_{0,n-1} \neq 0$  — произвольная постоянная. Соотношение (4.52), из которого определяются критические параметры неустойчивости, не зависит от выбора произвольной компоненты вектора  $\boldsymbol{\eta}_0$ .

Формулы (4.53) и (4.54) дают значения критического числа Рэлея при  $k = 0$ . В то же время, не ясно, достигают ли соответствующие нейтральные кривые минимума при  $k = 0$  (т.е. являются ли длинноволновые возмущения наиболее опасными). Для ответа на этот вопрос необходимо найти приближения более высокого порядка. С учетом решений (4.48), (4.50) система второго порядка записывается в виде

$$\begin{aligned} \varphi_2''' + (i\omega_1 - 2)\varphi_2'' - Pr^{-1}Ra_0 ((\Psi + 1)\theta_1 + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\eta}_1) - Pr^{-1}Ra_1 \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 &= 0, \\ Pr^{-1}(\theta_2'' - \theta_1) + i\omega_1\theta_1 + \varphi_2 &= 0, \\ \mathcal{SC}(\boldsymbol{\eta}_2'' - \boldsymbol{\eta}_1) + i\omega_1(\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\psi}\theta_1) + i\omega_2\boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\psi}\varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Используя решение (4.50), найдем  $\varphi_2$  из первого уравнения. Подставляя полученное выражение в последнее уравнение, интегрируя его на интервале от  $z = 0$  до  $z = 1$  и используя соотношение (4.49), найдем

$$\left( \mathcal{SC} - i\omega_1 E - \frac{\text{Ra}_0}{720\text{Pr}} \Upsilon \right) \boldsymbol{\eta}_1^* = \Lambda \boldsymbol{\eta}_0. \quad (4.57)$$

Здесь  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  — диагональная матрица с элементами

$$\begin{aligned} \lambda_j &= i\omega_2 + \left( i\omega_1 + \omega_1^2 \text{Sc}_j \right) \left( \frac{27\text{Pr}+6}{252\text{Sc}_j} - \frac{31}{1344} \right) + \left( \frac{1}{\text{Sc}_j} - i\omega_1 \right) \times \\ &\times \left( \frac{\text{Ra}_0}{1330560} \left( 262(\Psi+1) - \frac{181}{8\text{Pr}} \sum_{l=1}^{n-1} \psi_l \text{Sc}_l \right) - \frac{11}{448} + \frac{\text{Ra}_1}{\text{Ra}_0} \right). \end{aligned}$$

Система (4.57) является неоднородной системой линейных уравнений относительно компонент вектора  $\boldsymbol{\eta}_1^* = (\eta_{11}, \dots, \eta_{1,n-1})$ , при этом определитель матрицы системы равен нулю. Для получения условия разрешимости найдем решение первых  $n - 2$  уравнений относительно компонент  $\eta_{11}, \dots, \eta_{1,n-2}$  и подставим полученные выражения в последнее уравнение системы, используя также (4.52), (4.56). В результате получим

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_j \psi_j}{(\text{Sc}_j^{-1} - i\omega_1)^2} = 0.$$

Из этого уравнения находим следующее приближение числа Рэлея для монотонной неустойчивости ( $\omega_1 = 0$ ):

$$\text{Ra}_1^m = \frac{\text{Ra}_0^m}{462} \left( 17 - \frac{131}{1440} \text{Ra}_0^m (\Psi+1) \right). \quad (4.58)$$

Для колебательной неустойчивости получаются выражения

$$\begin{aligned} \text{Ra}_1^o &= \frac{11\text{Ra}_0^o}{448} - \frac{(\text{Ra}_0^o)^2}{1330560} \left( 262(\Psi+1) - \frac{181}{8\text{Pr}} \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j \text{Sc}_j \right) + \\ &+ \frac{(\text{Ra}_0^o)^2}{2880\text{Pr}} \left( 8\omega_1 \omega_2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\psi_j \text{Sc}_j^{-1}}{(\omega_1^2 + \text{Sc}_j^{-2})^2} - \frac{31}{336} \omega_1^2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\psi_j \text{Sc}_j}{\omega_1^2 + \text{Sc}_j^{-2}} \right), \\ \omega_2 &= \frac{30\text{Pr}(9\text{Pr}+2)}{7\text{Ra}_0^o \omega_1} \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\psi_j}{(\omega_1^2 + \text{Sc}_j^{-2})^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

#### 4.1.5 Бинарные смеси

Полагая  $n = 2$  в формулах (4.53), (4.58), найдем поведение числа Рэлея вблизи  $k = 0$  для монотонных возмущений:

$$\text{Ra}^m \sim \frac{720 \text{Pr}}{\Psi \text{Sc}} + \frac{60 \text{Pr}}{77 \Psi \text{Sc}} \left( 34 - 131 \frac{\text{Pr}(\Psi + 1)}{\Psi \text{Sc}} \right) k^2, \quad (4.60)$$

где  $\Psi$  — отношение разделения бинарной смеси. Этот формула полностью согласуется с результатами работ [137, 140] (в последней было впервые получено выражение для  $\text{Ra}_1$ ). Длинноволновые колебательные возмущения в бинарной смеси отсутствуют, так как уравнение (4.55) не имеет решения при  $n = 2$ . Ниже будут приведены карты устойчивости, характерные для жидких и газовых смесей. Эти результаты служат основой для изучения более сложного случая смесей из трех компонент.

Анализ первого члена в разложении (4.60) показывает, что длинноволновая неустойчивость существует при подогреве снизу ( $\text{Ra} > 0$ ) и нормальном эффекте Соре ( $\Psi > 0$ ), а также при подогреве сверху ( $\text{Ra} < 0$ ) и аномальном эффекте Соре ( $\Psi < 0$ ). Знак второго члена в разложении (4.60) определяет, является ли значение числа Рэлея при  $k = 0$  минимальным или нет. Этот член обращается в ноль при  $\Psi = \Psi_l$ , где

$$\Psi_l \equiv \frac{1}{34 \text{Sc}/131 \text{Pr} - 1}.$$

Здесь возникают два случая. Если  $\text{Sc}/\text{Pr} > 131/34$ , то минимальное значение числа Рэлея соответствует  $k \neq 0$  при  $0 < \Psi \leq \Psi_l$ , в то время как для остальных значений  $\Psi$  минимум Ra достигается при  $k = 0$ . Если  $\text{Sc}/\text{Pr} < 131/34$ , то наиболее опасные возмущения соответствуют  $k = 0$  при  $\Psi_l \leq \Psi < 0$  и  $k \neq 0$  для остальных значений  $\Psi$ .

Зависимость критических параметров неустойчивости от отношения разделения  $\Psi$  для бинарной смеси с  $\text{Pr} = 10$ ,  $\text{Sc} = 1000$  показана на рис. 4.3. Эти параметры типичны для жидкой бинарной смеси. Кривые 1', 2', 3' соответствуют свободным непроницаемым границам, для которых  $\text{Ra}_c = 27\pi^4/4 = 657.51$ . Кривые 1a, 1б, 2, 3 соответствуют твердым непроницаемым границам и получены на основе формулы (4.60) и результатов численных расчетов.

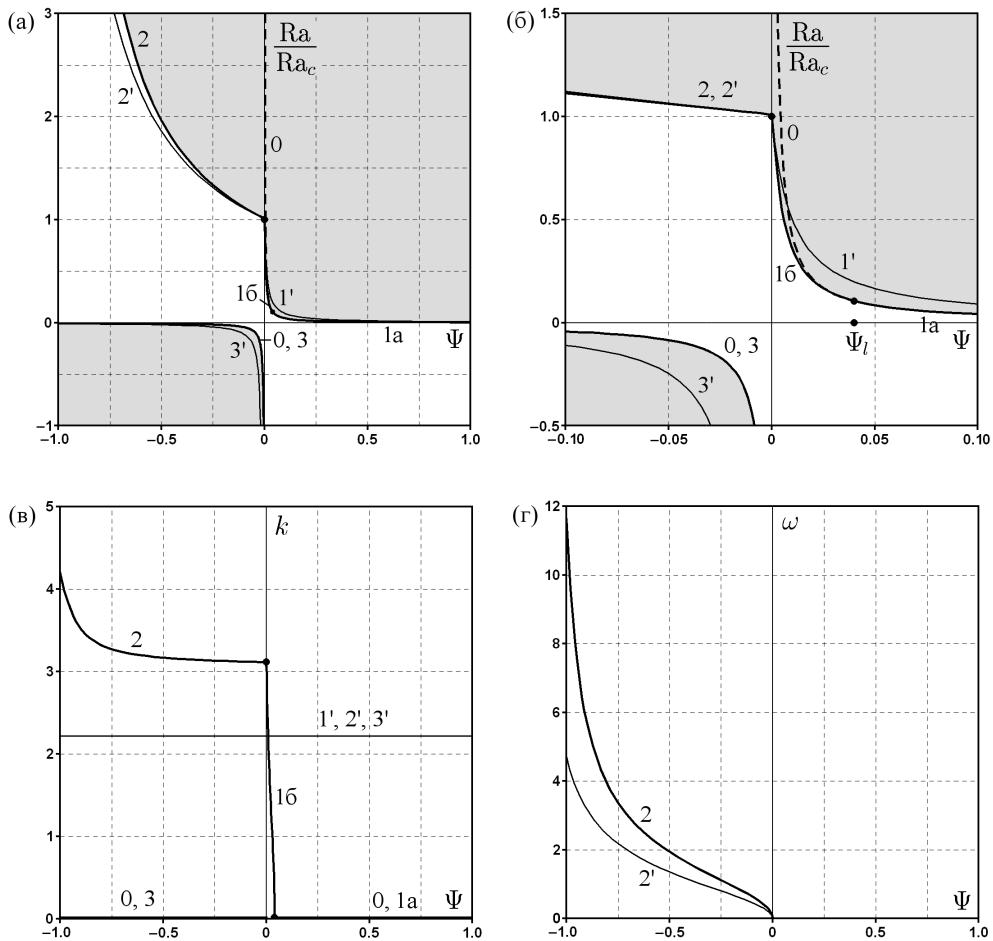


Рис. 4.3. Зависимость критических параметров неустойчивости от отношения разделения  $\Psi$  для бинарной смеси с  $Pr = 10$ ,  $Sc = 1000$ . Число Рэлея (а,б), волновое число (в), круговая частота (г). Кривые 0, 1а, 1б, 2, 3 соответствуют твердым непроницаемым границам (область неустойчивости заштрихована), кривые 1', 2', 3' — свободным проницаемым границам.

Здесь число Рэлея нормировано на значение  $Ra_c = 1707.76$ , которое является критическим для слоя однокомпонентной среды, а также для слоя бинарной смеси в отсутствии эффекта Соре ( $\Psi = 0$ ). Как видно из рис. 4.3 (а,б), качественный характер зависимости  $Ra$  от  $\Psi$  для обоих типов граничных условий одинаков. Однако, наличие твердых непроницаемых границ приводит к повышению критического числа Рэлея  $Ra$  (не путать с отношением  $Ra/Ra_c$ ) и критической частоты, а также к существенной зависимости критического волнового числа от отношения разделения. Кривая 1а описывает границу длинноволновой монотонной неустойчивости при подогреве снизу и совпадает с кривой 0, которая соответствует формуле (4.60) при  $k = 0$ . Эта

неустойчивость имеет место при малых числах Рэлея и связана с наличием дестабилизирующего градиента концентрации. Кривая 16 описывает границу коротковолновой монотонной неустойчивости при подогреве снизу на промежутке  $0 < \Psi < \Psi_l = 0.0401$ . Эта неустойчивость развивается при достаточно больших числах Рэлея и обусловлена совместным действием дестабилизирующих градиентов температуры и концентрации. При аномальном эффекте Соре ( $\Psi < 0$ ) имеет место длинноволновая монотонная неустойчивость при подогреве сверху (соответствующая кривая 3 совпадает с кривой 0).

Принцип монотонности возмущений (Теорема 4.2) для бинарной смеси с параметрами  $\text{Pr} = 10$ ,  $\text{Sc} = 1000$  дает следующий результат: возмущения монотонны при подогреве снизу и затухают при подогреве сверху, если  $0 < \Psi < 99$ . Этот результат согласуется с расчетами для твердых непроницаемых границ, однако дает неполную информацию о характеристиках устойчивости системы.

Для жидких бинарных смесей с аномальным эффектом Соре, подогреваемых снизу, можно указать простые формулы, которые достаточно точно приближают результаты численных результатов для твердых непроницаемых границ [31]. Рассмотрим формулы (4.47), справедливые для свободных проницаемых границ в предположении  $\text{Sc} \gg \text{Pr}$ . Введем в них две эмпирические постоянные и перепишем полученные соотношения в виде

$$\frac{\text{Ra}^o}{\text{Ra}_c} = 1 - \frac{a\Psi}{1 + \text{Pr}^{-1} + \Psi}, \quad \omega = \frac{3\pi^2}{2} \frac{b}{\text{Pr}} \sqrt{-\frac{\Psi}{1 + \text{Pr}^{-1} + \Psi}}. \quad (4.61)$$

При  $a = b = 1$  эти выражения совпадают с (4.47). Полагая  $a = 1.15$ ,  $b = 1.43$ ,  $\text{Ra}_c = 1707.76$  в (4.61), получим формулы, которые с хорошей точностью описывают зависимость критических параметров от отношения разделения в области  $-0.7 < \Psi < 0$ . Эти формулы используются для экспериментального измерения коэффициента Соре в бинарных смесях с аномальной термодиффузией [31]. Определяя критическое число Рэлея и критическую частоту из эксперимента, можно вычислить  $\Psi$  по какой-либо из приведенных выше формул. Заметим, что определение отношения разделения по критической частоте

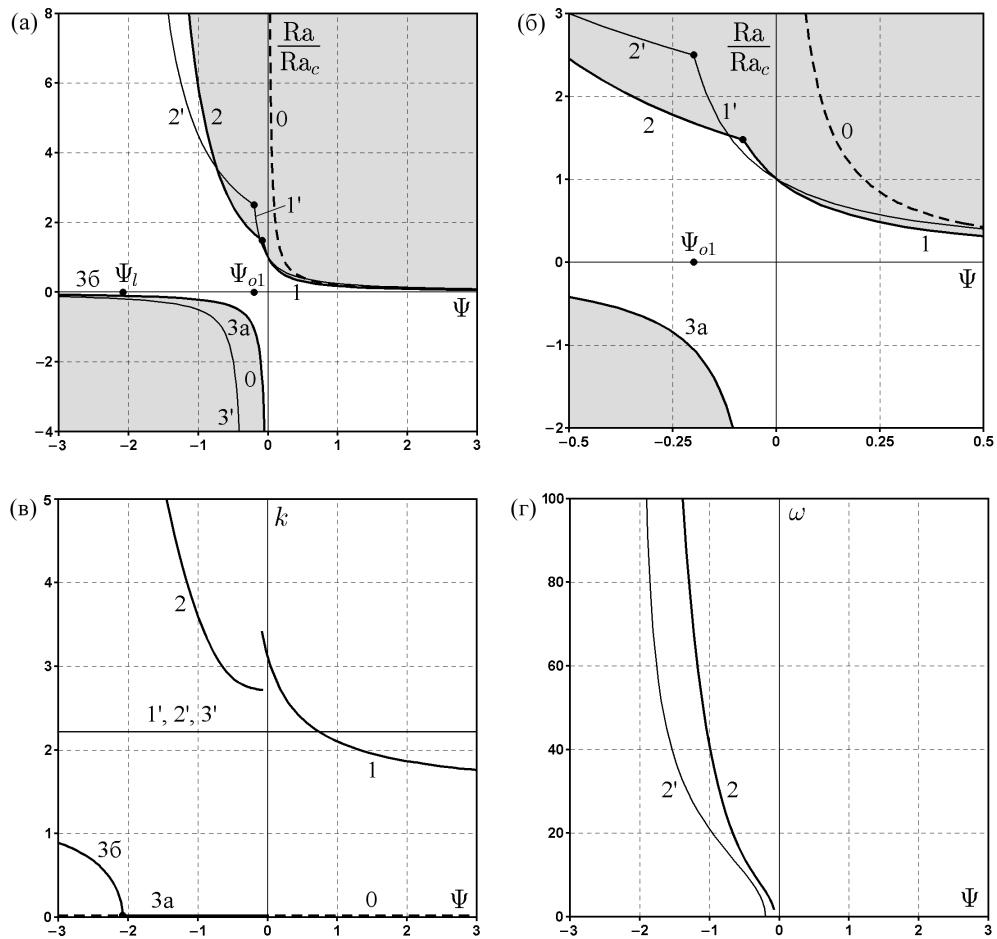


Рис. 4.4. Зависимость критических параметров неустойчивости от отношения разделения  $\Psi$  для бинарной смеси с  $\text{Pr} = 1$ ,  $\text{Sc} = 2$ . Число Рэлея (а,б), волновое число (в), круговая частота (г). Кривые 0, 1, 2, 3а, 3б соответствуют твердым непроницаемым границам (область неустойчивости заштрихована), кривые 1', 2', 3' — свободным проницаемым границам.

колебаний является более точным [31]. После этого коэффициент Соре определяется из (2.10) при условии, что известны коэффициенты теплового и концентрационного расширения смеси.

На рис. 4.4 показана карта устойчивости бинарной смеси с параметрами  $\text{Pr} = 1$ ,  $\text{Sc} = 2$ , которые типичны для газовых смесей. По сравнению со случаем жидких смесей, критическое число Рэлея и критическая частота здесь существенно возрастают, а граница между монотонной и колебательной неустойчивостью при подогреве снизу смещается в сторону отрицательных значений отношения разделения ( $\Psi = -0.081$  для твердых непроницаемых границ и  $\Psi = \Psi_{o1} = -0.2$  для свободных проницаемых границ). Это обуслов-

лено тем, что характерные времена теплопроводности и диффузии в газах являются величинами одного порядка (см. пункт 4.1.3). Такое соотношение между характерными временами также приводит к значительному сокращению областей длинноволновой неустойчивости. Наиболее опасные возмущения соответствуют  $k = 0$  лишь при подогреве сверху в области  $\Psi_l \leq \Psi < 0$ , где  $\Psi_l = -2.079$  (кривая 3а). Для остальных значений  $\Psi$  минимум нейтральной кривой достигается при  $k \neq 0$ . При подогреве снизу и нормальном эффекте Соре значение числа Рэлея, определенное по формуле (4.60) (кривая 0), существенно отличается от истинной границы устойчивости (кривая 1). Заметим также, что область неустойчивости при подогреве сверху для твердых непроницаемых границ ( $\Psi < 0$ ) шире, чем для свободных проницаемых границ ( $\Psi < \Psi_m = -1/3$ ). В целом, различие между результатами для рассматриваемых типов граничных условий является более существенным в газовых смесях, чем в жидкостях. Заметим, что согласно принципу монотонности возмущений (Теорема 4.2), в бинарной смеси с параметрами  $\text{Pr} = 1$ ,  $\text{Sc}_2 = 2$  возмущения монотонны при подогреве снизу и затухают при подогреве сверху, если  $0 < \Psi < 1$ . Этот результат согласуется с расчетами для твердых непроницаемых границ, однако дает информацию о поведении системы лишь в узкой области значений  $\Psi$ .

#### 4.1.6 Тройные смеси

Для описания тройных смесей и сравнения результатов со случаем бинарных смесей будем использовать пространство параметров  $(\Psi, \psi_1, s)$ , где  $\Psi = \psi_1 + \psi_2$  — суммарное отношение разделения и

$$s = \frac{\text{Sc}_1}{\text{Sc}_2} = \frac{L^2/D_{11}}{L^2/D_{22}}$$

— отношение чисел Шмидта, которое можно трактовать как отношение диффузионных времен компонентов смеси. Без ограничения общности можно считать  $0 < s \leq 1$ . Предполагается, что плотность компонентов 1 и 2 меньше плотности растворителя (компонента 3). Полагая  $n = 3$  в формулах (4.53), (4.58), найдем поведение числа Рэлея вблизи  $k = 0$  для монотонных возмуще-

ний:

$$\text{Ra}^m \sim \frac{60 \text{Pr}}{\text{Sc}_2 (\Psi + \psi_1(s-1))} \left( 12 + \left( 34 - \frac{131 \text{Pr} (\Psi + 1)}{\text{Sc}_2 (\Psi + \psi_1(s-1))} \right) \frac{k^2}{77} \right). \quad (4.62)$$

Для колебательных возмущений из (4.54), (4.55), (4.59) получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \text{Ra}^o \sim & \frac{720 \text{Pr} (s+1)}{\text{Sc}_2 s \Psi} + k^2 \frac{60 \text{Pr} (s+1)}{77 \Psi^2 s^2 \text{Sc}_2^2} \left( -131 \text{Pr} (s+1) + \right. \\ & + \left( 2 \text{Sc}_2 (17s-5) + 22 - 32 \text{Pr} - 131s \text{Pr} \right) \Psi + \\ & \left. + \left( 10 \text{Sc}_2 (s+1) - 22 - 99 \text{Pr} \right) (1-s) \psi_1 \right), \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\omega \sim \frac{k^2}{\text{Sc}_2 s} \sqrt{\frac{\psi_1 (1-s^2)}{\Psi} - 1} + k^4 \frac{\psi_1 (\Psi - \psi_1) (9\text{Pr} + 2)(s-1)^2 (s+1)}{168 \text{Sc}_2^2 s^2 \Psi \sqrt{\Psi(\psi_1 (1-s^2) - \Psi)}}. \quad (4.64)$$

На основе этих формул определим области длинноволновой неустойчивости в пространстве параметров. Если диффузионные времена компонентов одинаковы ( $s = 1$ ), то тройная смесь ведет себя подобно бинарной смеси с отношением разделения  $\Psi$  и числом Шмидта  $\text{Sc} = \text{Sc}_1 = \text{Sc}_2$ . Области коротковолновой и длинноволновой монотонной неустойчивости полностью соответствуют описанным в пункте 4.1.5, а длинноволновая колебательная неустойчивость отсутствует. В дальнейшем будем предполагать  $0 < s < 1$ .

**Подогрев снизу** ( $\text{Ra} > 0$ ). Анализируя первые члены в разложениях (4.62)–(4.64), выделим области существования неустойчивости при  $k = 0$ . Для монотонной неустойчивости эти области описываются неравенствами  $\{\Psi < 0, \psi_1 < \psi_m\}$  и  $\{\Psi \geq 0, \psi_1 \leq \psi_o\}$ , а для колебательной неустойчивости имеем  $\{\Psi > 0, \psi_1 > \psi_o\}$ , где

$$\psi_m \equiv \frac{\Psi}{1-s}, \quad \psi_o \equiv \frac{\Psi}{1-s^2}. \quad (4.65)$$

Анализ вторых членов в разложении  $\text{Ra}^m$ ,  $\text{Ra}^o$  позволяет определить подобласти указанных выше областей, в которых минимум нейтральной кривой достигается при  $k \neq 0$ . Введем обозначения:

$$\psi_{ml} \equiv \frac{\Psi (131 \text{Pr} - 34 \text{Sc}_2) + 131 \text{Pr}}{34 \text{Sc}_2 (s-1)}, \quad \psi_{10} \equiv \frac{131 \text{Pr} (s+1)(1-s)^{-1}}{10 \text{Sc}_2 (s+1) - 22 - 99 \text{Pr}},$$

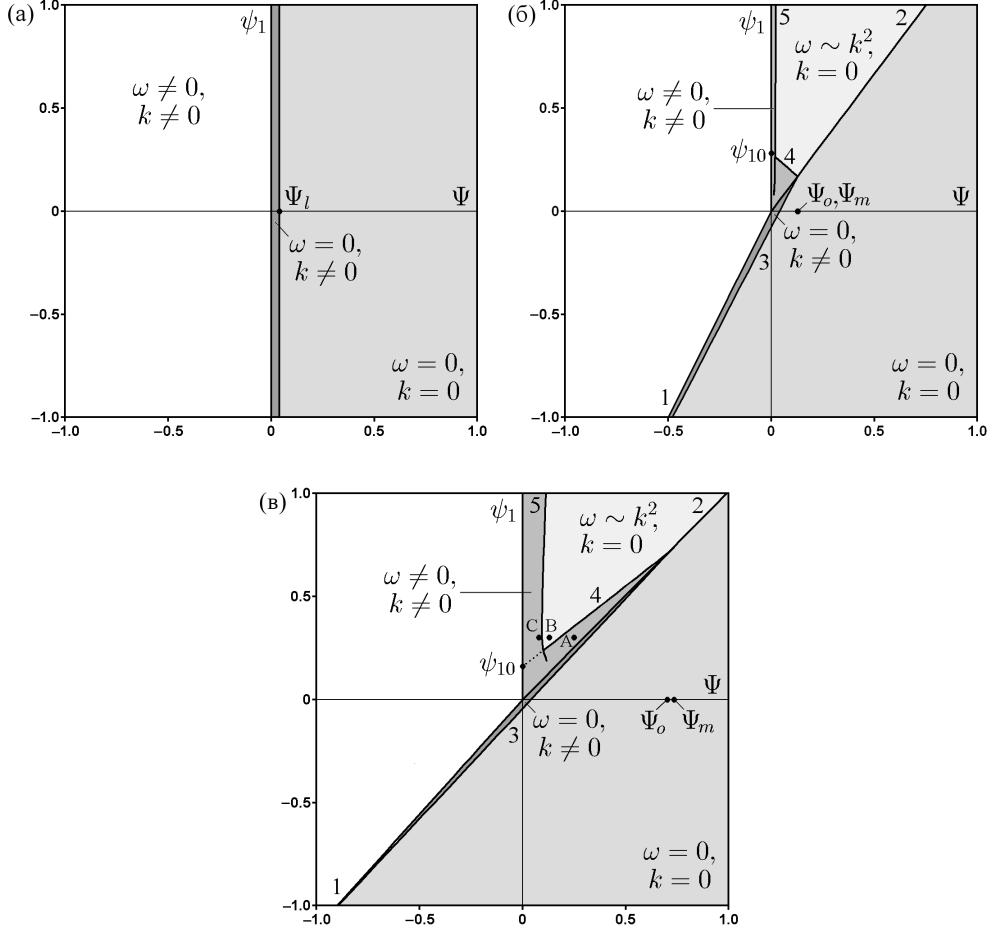


Рис. 4.5. Области неустойчивости при подогреве снизу тройной смеси с параметрами  $s = 1.0$  (а),  $s = 0.5$  (б),  $s = 0.1$  (в),  $Sc_2 = 1000$ ,  $Pr = 10$ . В областях указаны критические значения частоты  $\omega$  и волнового числа  $k$ . Границы областей описываются уравнениями  $\psi_1 = \psi_m$  (прямая 1),  $\psi_1 = \psi_o$  (прямая 2),  $\psi_1 = \psi_{ml}$  (прямая 3),  $\psi_1 = \psi_{ol}$  (прямая 4), см. (4.65), (4.66). Области существования длинноволновой неустойчивости заштрихованы.

$$\begin{aligned} \psi_{ol} &\equiv \frac{(2Sc_2(5 - 17s) - 22 + 32Pr + 131sPr)\Psi + 131Pr(s+1)}{(1-s)(10Sc_2(s+1) - 22 - 99Pr)}, \\ \Psi_m &\equiv \frac{131Pr(s+1)}{34Sc_2s - 131Pr(s+1)}, \\ \Psi_o &\equiv \frac{131Pr(s+1)^2}{s(34Sc_2(s+1) + 22 - 163Pr) - 131Pr(s^2+1)}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Монотонные коротковолновые возмущения являются наиболее опасными в областях  $\{-1 < \Psi < 0, \psi_{ml} < \psi_1 < \psi_m\}$ , а также в областях

$$\{0 \leq \Psi \leq \Psi_m, \psi_{ml} < \psi_1 \leq \psi_o\} \quad \text{при} \quad \Psi_m > 0,$$

$$\{0 \leq \Psi, \psi_{ml} < \psi_1 \leq \psi_o\} \quad \text{при} \quad \Psi_m < -1.$$

Колебательные коротковолновые возмущения наиболее опасны в областях

$$\begin{aligned} \{0 < \Psi < \Psi_o, \psi_o < \psi_1 < \psi_{ol}\} &\quad \text{при } \Psi_o > 0, \psi_{10} > 0; \\ \{0 < \Psi \leq \Psi_o, \psi_1 > \psi_o\}, \{\Psi > \Psi_o, \psi_1 > \psi_{ol}\} &\quad \text{при } \Psi_o > 0, \psi_{10} < 0; \\ \{\Psi > 0, \psi_o < \psi_1 < \psi_{ol}\} &\quad \text{при } \Psi_o < 0, \psi_{10} > 0. \end{aligned}$$

Из неравенств для величин  $\Psi_m, \Psi_o, \psi_{10}$  могут быть легко выведены неравенства, ограничивающие область значений числа Шмидта  $Sc_2$ .

В качестве примера рассмотрим тройную смесь с параметрами  $Pr = 10$ ,  $Sc_2 = 1000$ , подогреваемую снизу. Карта областей устойчивости на плоскости  $(\Psi, \psi_1)$  для различных значений отношения чисел Шмидта  $s = Sc_1/Sc_2$  показана на рис. 4.5. Если  $s = 1$  (рис. 4.5 (а)), то тройная смесь ведет себя подобно бинарной смеси. Имеются области длинноволновой ( $\Psi \geq \Psi_l = 0.0401$ ) и коротковолновой ( $0 \leq \Psi < \Psi_l$ ) монотонной неустойчивости, а также коротковолновой колебательной неустойчивости ( $\Psi < 0$ ). На рис. 4.5 (б) и 4.5 (в) показана эволюция этих областей при  $s = 0.5$  и  $s = 0.1$  соответственно. При  $s \rightarrow 0$  границы области длинноволновой монотонной неустойчивости  $\psi_1 = \psi_m$  (прямая 1) и  $\psi_1 = \psi_o$  (прямая 2) приближаются к прямой  $\psi_1 = \Psi$ . Дело в том, что при малых значениях  $s$  диффузационные свойства второго компонента смеси значительно хуже, чем первого. Поэтому характеристики устойчивости в основном определяются градиентом концентрации второго компонента, который характеризуется отношением разделения  $\psi_2$ , см. (4.5). В этом случае тип неустойчивости будет зависеть от значений  $\psi_2$  подобно тому, как в бинарной смеси он определяется отношением разделения  $\Psi$ . Поэтому при малых  $s$  следует ожидать монотонной неустойчивости при  $\psi_2 \geq 0$  и колебательной неустойчивости при  $\psi_2 < 0$ . Граница между этими режимами  $\psi_2 = 0$  соответствует прямой  $\psi_1 = \Psi$ .

Как было показано выше, в смесях с тремя и большим числом компонент может существовать длинноволновая колебательная неустойчивость. В тройной смеси такая неустойчивость имеет место при  $0 < s < 1$  в области  $\Psi > 0$ ,  $\psi_1 > \psi_o$ . В этой области градиенты температуры и концентрации первого компонента дестабилизируют систему ( $\psi_1 > 0$ ), а градиент концентрации

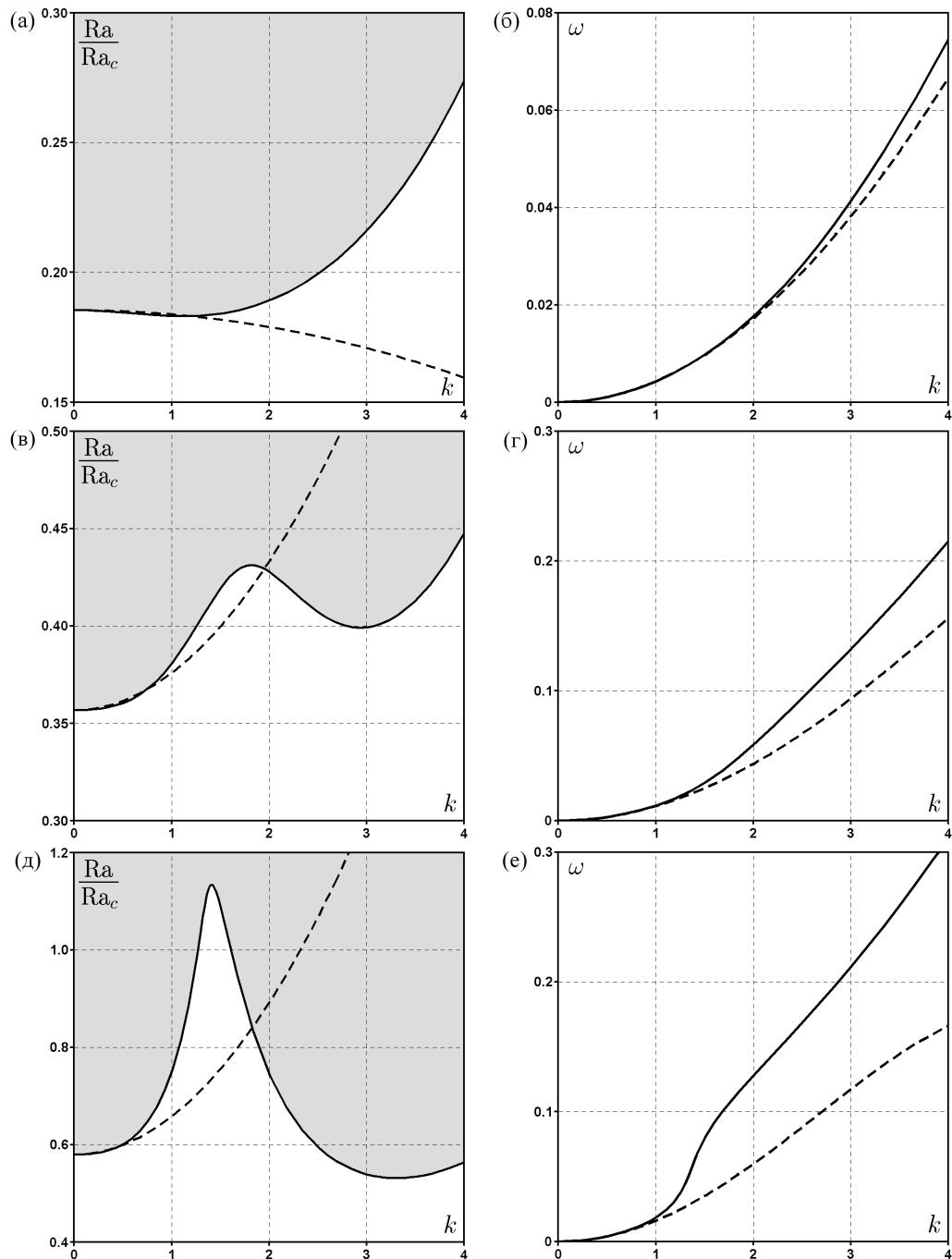


Рис. 4.6. Нейтральные кривые для тройных смесей с параметрами  $\Psi = 0.25$  (а, б),  $\Psi = 0.13$  (в, г),  $\Psi = 0.08$  (д, е),  $\psi_1 = 0.3$ ,  $s = 0.1$ ,  $Sc_2 = 1000$ ,  $Pr = 10$ . Указанные кривые отвечают точкам А, В, С соответственно на рис. 4.5 (в). Сплошные линии – численный расчет, штриховые линии – формулы (4.63), (4.64). Область неустойчивости заштрихованы.

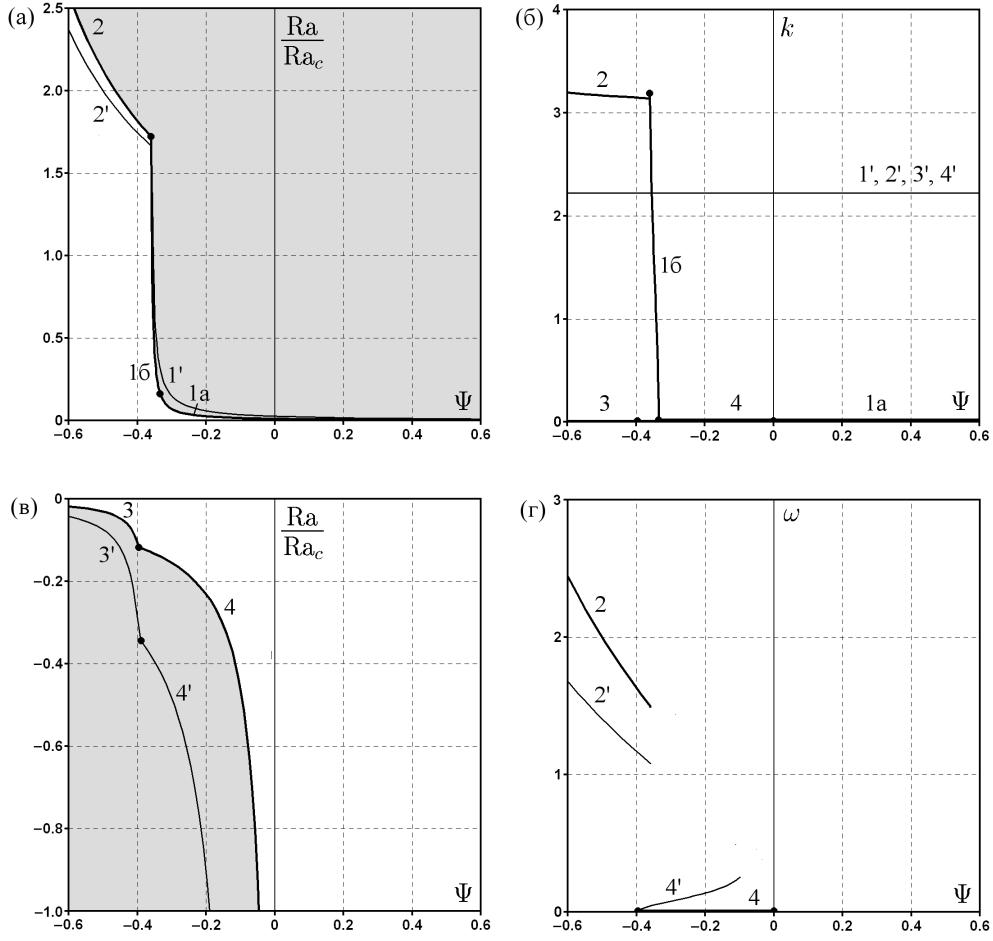


Рис. 4.7. Зависимость критических параметров неустойчивости от суммарного отношения разделения  $\Psi$  для тройной смеси с  $\psi_1 = -0.4$ ,  $s = 0.1$ ,  $Sc_2 = 1000$ ,  $Pr = 10$ . Число Рэлея (а, б), волновое число (в), круговая частота (г). Кривые 1а, 16, 2, 3, 4 соответствуют твердым непроницаемым границам (область неустойчивости заштрихована), кривые 1'—4' — свободным проницаемым границам.

второго компонента — стабилизирует ( $\psi_2 < 0$ ), причем  $|\psi_2| < |\psi_1|$ . Слабая стабилизация со стороны второго компонента приводит к появлению длинноволновых колебаний. Сильный стабилизирующий эффект, вызванный градиентами концентрации одного или двух компонентов смеси (область  $\Psi < 0$ ,  $\psi_1 > \psi_m$ ) приводит к коротковолновой колебательной неустойчивости.

На рис. 4.5 (б) и 4.5 (в) также показаны подобласти, в которых существует длинноволновая неустойчивость, однако минимум нейтральной кривой достигается при  $k \neq 0$ . Поведение нейтральных кривых в точках А, В, С (см. рис. 4.5 (в)) показано на рис. 4.6. В точке А наиболее опасные колебательные возмущения соответствуют  $k = 1.133$ , в то время как в точке В мини-

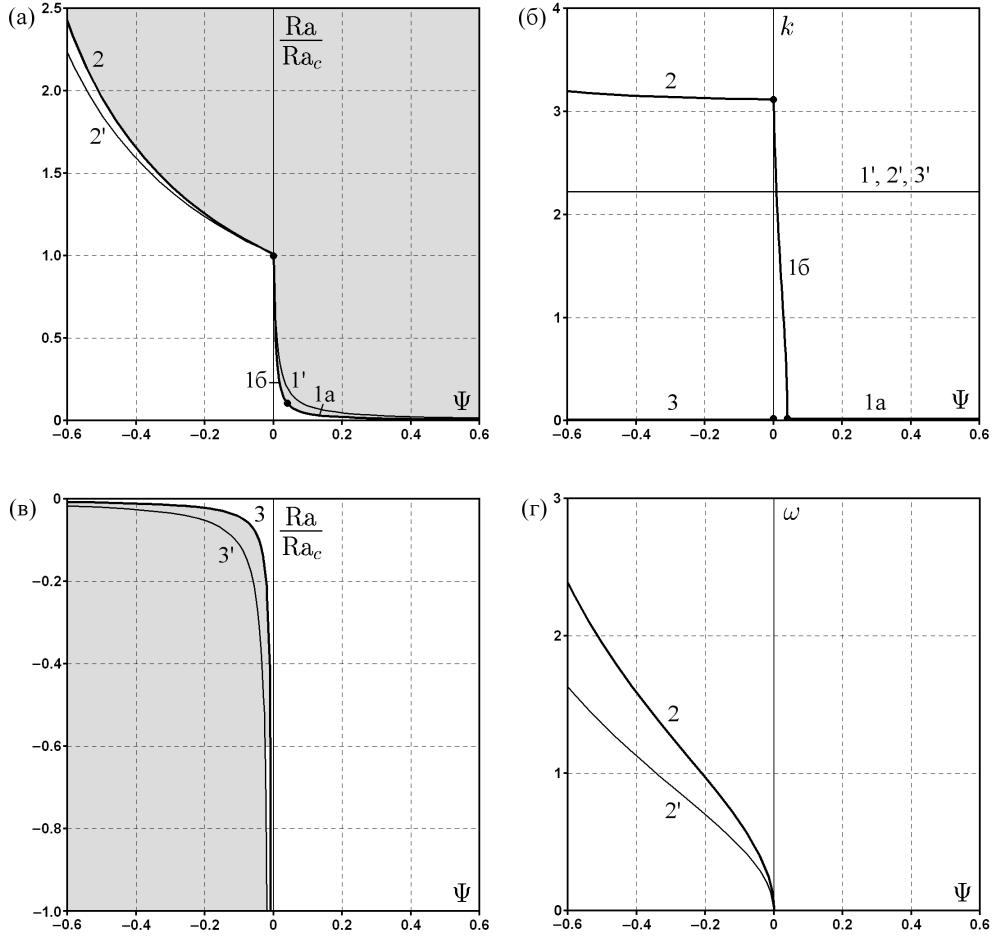


Рис. 4.8. Зависимость критических параметров неустойчивости от суммарного отношения разделения  $\Psi$  для тройной смеси с  $\psi_1 = 0$ ,  $s = 0.1$ ,  $Sc_2 = 1000$ ,  $Pr = 10$ . Число Рэлея (а, б), волновое число (в), круговая частота (г). Кривые 1а, 1б, 2, 3 соответствуют твердым непроницаемым границам (область неустойчивости заштрихована), кривые 1', 2', 3' — свободным проницаемым границам.

мум нейтральной кривой достигается при  $k = 0$ . Граница между областями длинноволновой и коротковолновой колебательной неустойчивости (прямая 4) найдена из условия равенства нулю коэффициента при  $k^2$  в выражении (4.63). В точке С наиболее опасные возмущения соответствуют  $k = 3.309$ . Однако, как видно из рис. 4.6 (д), существование таких возмущений не может быть установлено из асимптотического поведения  $Ra^o$  при  $k \rightarrow 0$ . Кривые 5 на рис. 4.5 (б) и 4.5 (в) являются результатом численного решения задачи.

Зависимость критических параметров неустойчивости от суммарного отношения разделения  $\Psi$  для различных значений  $\psi_1$  приведена на рис. 4.7—4.9. В случае  $\psi_1 = 0$  (рис. 4.8) эффект Соре для первого компонента отсутствует

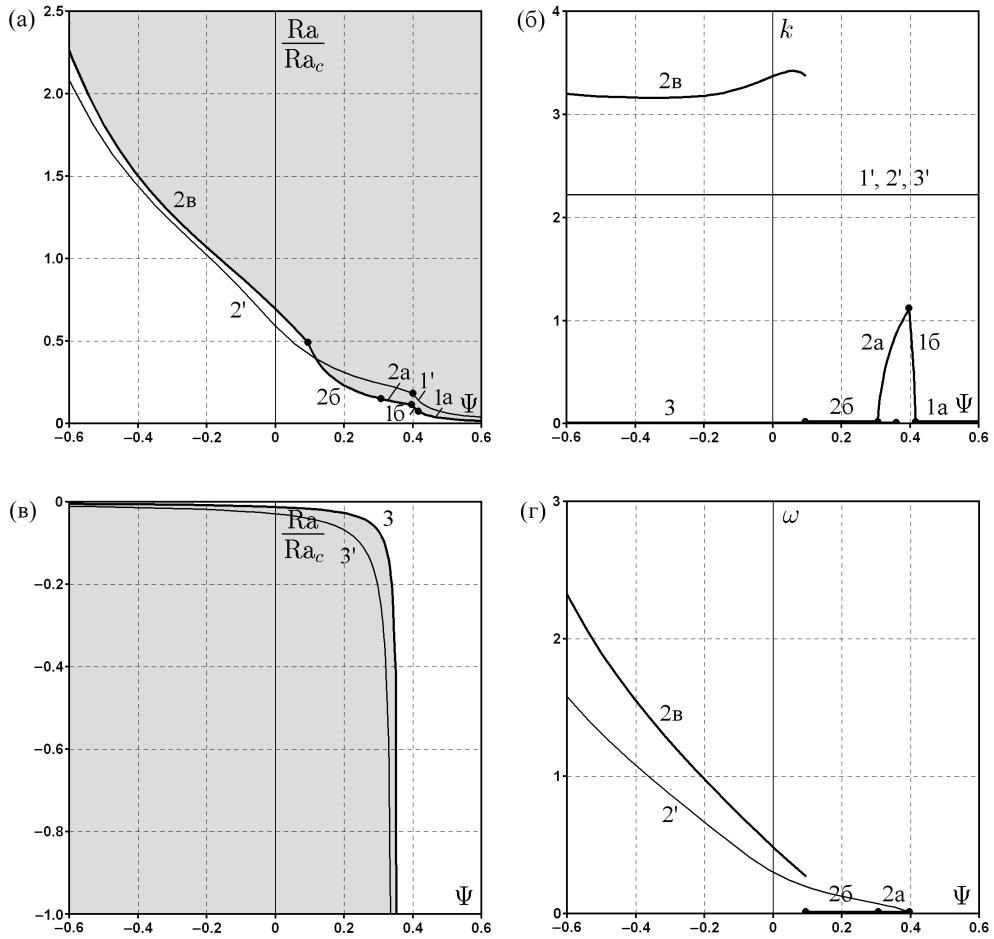


Рис. 4.9. Зависимость критических параметров неустойчивости от суммарного отношения разделения  $\Psi$  для тройной смеси с  $\psi_1 = 0.4$ ,  $s = 0.1$ ,  $Sc_2 = 1000$ ,  $Pr = 10$ . Число Рэлея (а, б), волновое число (в), круговая частота (г). Кривые 1а, 16, 2а, 26, 2в, 3 соответствуют твердым непроницаемым границам (область неустойчивости заштрихована), кривые 1', 2', 3' — свободным проницаемым границам.

и характеристики устойчивости соответствуют бинарной смеси с параметрами  $\Psi = \psi_2$ ,  $Sc = Sc_2$ . При  $\psi_1 = -0.4$  (рис. 4.7) граница между монотонной неустойчивостью (кривые 1а и 1б) и колебательной неустойчивостью (кривая 2) смещается в сторону отрицательных значений  $\Psi$ . Этот факт был объяснен выше при обсуждении областей неустойчивости на рис. 4.5. В случае  $\psi_1 = 0.4$  (рис. 4.9) эта граница смещается в сторону положительных значений  $\Psi$ , при этом появляется область длинноволновых колебательных возмущений (кривая 2б), см. также рис. 4.5 (в).

**Подогрев сверху** ( $Ra < 0$ ). Анализируя первые члены в разложениях (4.62)–(4.64), выделим области существования неустойчивости при  $k = 0$ . Для

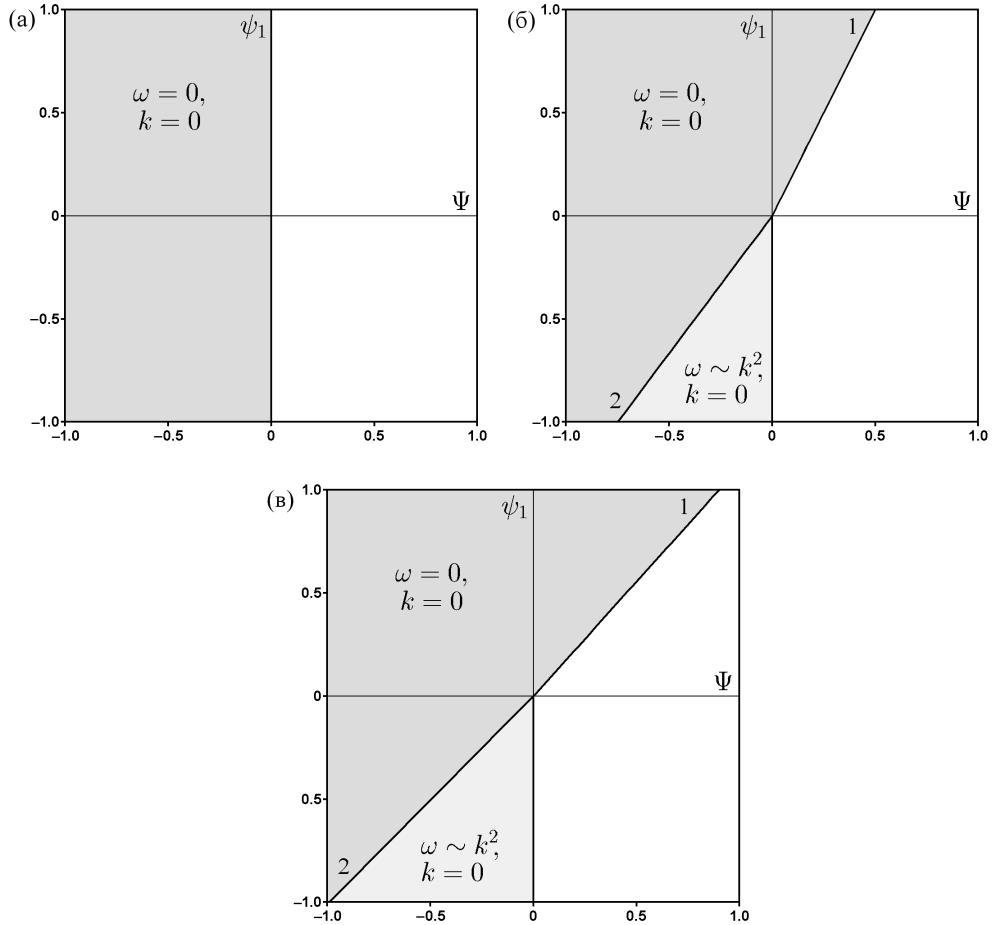


Рис. 4.10. Области неустойчивости при подогреве сверху тройной смеси с параметрами  $s = 1.0$  (а),  $s = 0.5$  (б),  $s = 0.1$  (в),  $\text{Sc}_2 = 1000$ ,  $\text{Pr} = 10$ . В областях указаны критические значения частоты  $\omega$  и волнового числа  $k$ . Границы областей описываются уравнениями

$\psi_1 = \psi_m$  (прямая 1),  $\psi_1 = \psi_o$  (прямая 2), см. (4.65). Области длиноволновой неустойчивости заштрихованы.

монотонной неустойчивости имеем  $\{\Psi < 0, \psi_1 \geq \psi_o\}$  и  $\{\Psi \geq 0, \psi_1 > \psi_m\}$ , а для колебательной неустойчивости получаем  $\{\Psi < 0, \psi_1 < \psi_o\}$ . Подобласть, в которой нейтральная кривая монотонной неустойчивости достигает минимума при  $k \neq 0$ , описывается неравенствами  $\{\Psi < \Psi_m, \psi_o \leq \psi_1 < \psi_{ml}\}$  при условии  $\Psi_m < -1$ . Аналогичные подобласти для колебательной неустойчивости описываются неравенствами

$$\begin{aligned} \{\Psi < \Psi_o, \psi_1 < \psi_o\}, \quad \{\Psi_o \leq \Psi < 0, \psi_1 < \psi_{ol}\} &\quad \text{при } \Psi_o < 0, \psi_{10} < 0; \\ \{\Psi < \Psi_o, \psi_{ol} < \psi_1 < \psi_o\}, &\quad \text{при } \Psi_o < 0, \psi_{10} > 0; \\ \{\Psi < 0, \psi_1 < \psi_{ol}\} &\quad \text{при } \Psi_o > 0, \psi_{10} < 0. \end{aligned}$$

Карта областей устойчивости для тройной смеси с  $\text{Pr} = 10$ ,  $\text{Sc}_2 = 1000$  показана на рис. 4.10 для различных значений отношения чисел Шмидта  $s$ , а зависимость критических параметров от суммарного отношения разделения  $\Psi$  для различных значений  $\psi_1$  приведена на рис. 4.7—4.9. Если  $s = 1$ , то тройная смесь ведет себя подобно бинарной смеси. Имеется область длинноволновой монотонной неустойчивости при  $\Psi < 0$ . При  $0 < s < 1$  появляется область длинноволновой колебательной неустойчивости, которая вызвана совместным действием стабилизирующих градиентов температуры и концентрации второго компонента ( $\psi_2 > 0$ ) и дестабилизирующим градиентом концентрации первого компонента ( $\psi_1 < 0$ ), причем  $|\psi_1| > |\psi_2|$ . В отличие от тройной смеси, в бинарной смеси при подогреве сверху возможна только монотонная неустойчивость. При  $s \rightarrow 0$  граница области длинноволновой монотонной неустойчивости (прямые 1 и 2) приближается к прямой  $\psi_1 = \Psi$ . Причины такого поведения системы обсуждались при изучении случая подогрева снизу.

Сравним полученные результаты с принципом монотонности возмущений (Теорема 4.1). Для тройной смеси, удовлетворяющей условиям  $\text{Sc}_1 > \text{Pr}$ ,  $\text{Sc}_2 > \text{Pr}$ ,  $\text{Sc}_2 > \text{Sc}_1$ , возмущений монотонны при подогреве снизу и затухают при подогреве сверху, если выполнены неравенства

$$0 < \Psi < \frac{\text{Sc}_2}{\text{Pr}} - 1, \quad 0 < \Psi_1 < \Psi, \quad (4.67)$$

$$\psi_1 < \frac{(\text{Sc}_2 - \text{Pr}(\Psi + 1))(\text{Sc}_1 - \text{Pr})}{\text{Pr}(\text{Sc}_2 - \text{Sc}_1)},$$

которые следуют из (4.27). Например, при  $\text{Pr} = 10$ ,  $\text{Sc}_1 = 100$ ,  $\text{Sc}_2 = 1000$  из (4.67) будем иметь  $0 < \Psi < 99$ ,  $0 < \psi_1 < \Psi$ ,  $\psi_1 < 9.9 - 0.1\Psi$ . Этот результат согласуется с картами устойчивости для твердых проницаемых границ на рис. 4.5 (в) и 4.10 (в), однако дает неполную информацию о характеристиках устойчивости системы.

**Структура возмущений.** На рис. 4.11 и 4.12 показаны типичные структуры монотонных и колебательных возмущений в тройной смеси при подогреве снизу. Светлые области соответствуют большим значениям температуры и концентрации, а темные области — меньшим. Указанные структуры получены

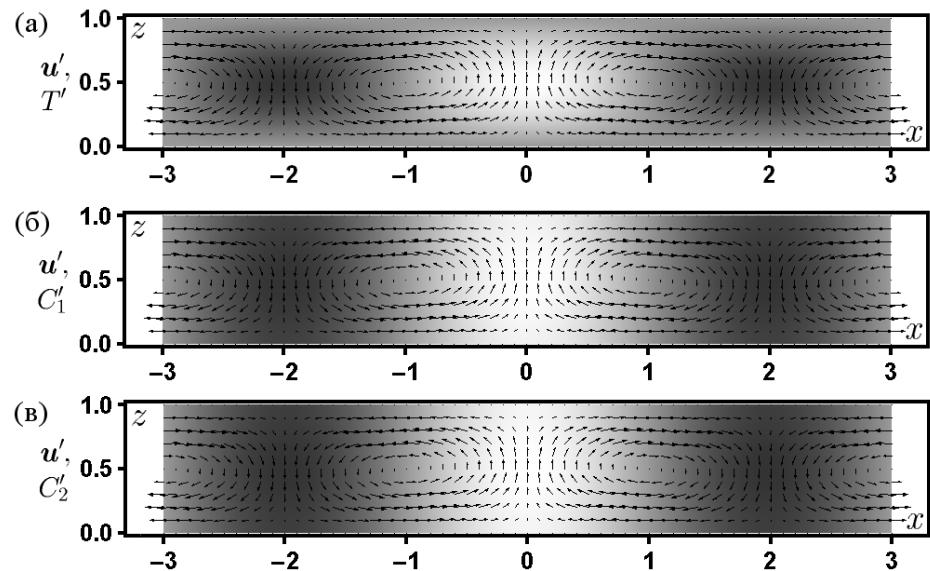


Рис. 4.11. Структура монотонных возмущений при подогреве снизу тройной смеси с параметрами  $\Psi = 0.11$ ,  $\psi_1 = 0.10$ ,  $s = 0.1$ ,  $Sc_2 = 1000$ ,  $Pr = 10$ . Поля температуры (а), концентрации первого (б) и второго (в) компонентов с наложенным полем скоростей.

Критические параметры неустойчивости:  $Ra = 344.72$ ,  $k = 1.575$ .

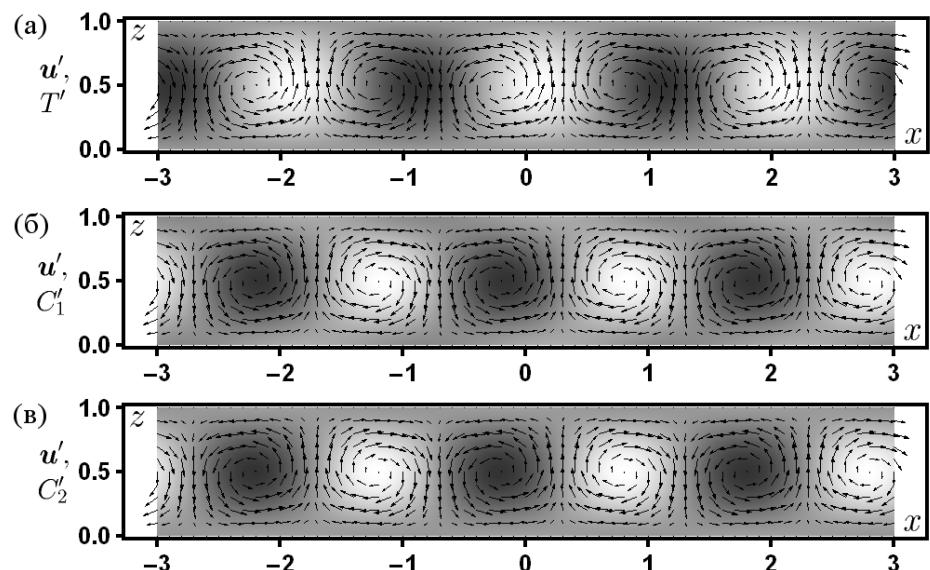


Рис. 4.12. Структура колебательных возмущений при подогреве снизу тройной смеси с параметрами  $\Psi = -0.3$ ,  $\psi_1 = -0.1$ ,  $s = 0.1$ ,  $Sc_2 = 1000$ ,  $Pr = 10$ . Поля температуры (а), концентрации первого (б) и второго (в) компонентов с наложенным полем скоростей.

Критические параметры неустойчивости:  $Ra = 2589.05$ ,  $k = 3.135$ ,  $\omega = 0.0081$ .

путем численного интегрирования амплитудных уравнений (4.7) с граничными условиями (4.8) и последующим восстановлением горизонтальной компоненты вектора скорости из уравнения неразрывности. Монотонная неустойчивость (рис. 4.11) вызвана совместным действием дестабилизирующих градиентов температуры и концентрации. Это приводит к существенному понижению критического числа Рэлея ( $\text{Ra} = 344.72$ ) и увеличению продольного размера конвективных ячеек по сравнению со случаем однокомпонентной среды. Колебательная неустойчивость (рис. 4.12) вызвана совместным действием дестабилизирующего градиента температуры и стабилизирующих градиентов концентрации. В результате критическое число Рэлея повышается ( $\text{Ra} = 2589.05$ ), а продольный размер конвективных ячеек становится равен поперечному размеру.

#### 4.1.7 Пример тройной смеси

Результаты в предыдущих параграфах были получены в предположении, что матрица  $\mathcal{SC}$  является диагональной (таким образом, не учитывался эффект перекрестной диффузии). В реальных тройных смесях этот эффект может быть весьма существенен [152, 153]. Для его учета применим обратное преобразование по отношению к (3.36). В случае тройной смеси необходимо сделать замену переменных

$$s \rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1}, \quad \text{Sc}_2 \rightarrow \frac{1}{\nu_2}, \quad (4.68)$$

$$\psi_1 \rightarrow \frac{\nu_1 + \delta \text{Sc}_{12}^{-1} - \text{Sc}_{11}^{-1}}{\nu_2 - \nu_1} \left[ \left( \frac{\text{Sc}_{12} (\nu_2 - \text{Sc}_{11}^{-1})}{\delta} + 1 \right) \psi_1 - \Psi \right],$$

где

$$\nu_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \text{Sc}_{11}^{-1} + \text{Sc}_{22}^{-1} \pm \sqrt{(\text{Sc}_{11}^{-1} - \text{Sc}_{22}^{-1})^2 + 4 \text{Sc}_{12}^{-1} \text{Sc}_{21}^{-1}} \right]$$

есть собственные значения матрицы  $\mathcal{SC}$ ,  $\text{Sc}_{ij}$  — числа Шмидта для тройной смеси и  $\delta = \beta_1/\beta_2$ .

В качестве примера рассмотрим тройную смесь углеводородов: додекан (компонент 1), изобутилбензол (компонент 2) и тетралин (компонент 3) с равными массовыми долями компонентов  $C_{i0} = 1/3$  при средней температуре  $25^\circ$

С. В качестве растворителя выбран наиболее тяжелый компонент (тетралин). Физические свойства этой смеси и безразмерные параметры приведены в Таблице 2.2. Как отмечалось в параграфе 2.2, для данной смеси неизвестно значение коэффициента температуропроводности. Использование типичного для жидких смесей значения  $\chi = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$  дает  $\text{Pr} = 15.28$ . Эффект Соре для легких компонентов 1 и 2 является положительным, поэтому их концентрация возрастает у нагретой границы. В данной смеси возможна неустойчивость при подогреве снизу. Производя замену переменных в выражении (4.62) по формулам (4.68), найдем критическое значение числа Рэлея  $\text{Ra} = 12$ , которое достигается при  $k = 0$ .

## 4.2 Устойчивость конвективного движения в вертикальном слое

### 4.2.1 Постановка задачи

В настоящем параграфе исследуется вопрос об устойчивости плоскопараллельного конвективного течения многокомпонентной смеси в вертикальном слое, подогреваемом сбоку. Учитываются разделение смеси под действием эффекта Соре и перекрестная диффузия. Исследование данной конфигурации для случая бинарной смеси было выполнено в работе [171]. Для смеси с произвольным числом компонент рассматриваемая задача является достаточно сложной благодаря наличию большого числа управляемых параметров. В данном параграфе мы ограничимся исследованием устойчивости относительно длинноволновых возмущений.

Рассмотрим двумерный вертикальный слой толщины  $2L$ , заполненный многокомпонентной смесью (рис. 4.13). Слой находится в поле силы тяжести, при этом его боковые стенки поддерживаются при постоянных температурах  $T_0 \pm \Delta T$ . Предполагается, что справедливо приближение Буссинеска и плотность смеси линейно зависит от температуры и концентрации компонентов согласно (2.31). Движение смеси описывается уравнениями (2.32). На грани-

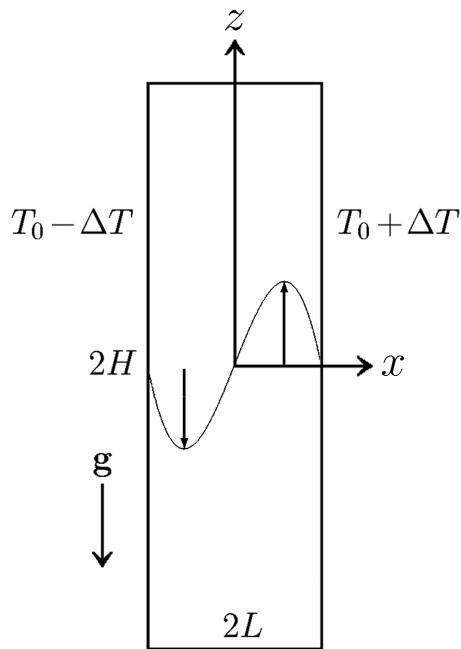


Рис. 4.13. Вертикальный слой.

цах слоя ставятся условия прилипания и отсутствия диффузионного потока массы, а также задается температура:

$$x = \pm L : \quad \mathbf{u} = (u, w) = 0, \quad T = T_0 \pm \Delta T, \quad D \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} + \mathbf{D}_T \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (4.69)$$

Интегрируя уравнение неразрывности  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  по области, ограниченной произвольным сечением  $z = \text{const}$  и стенками слоя, найдем

$$\int_{-L}^L w \, dx = 0. \quad (4.70)$$

Таким образом, расход жидкости через любое поперечное сечение должен быть равен нулю. Интегрирование уравнения сохранения массы компонентов смеси по области, ограниченной стенками слоя, дает

$$\frac{1}{4HL} \int_{-H}^H \int_{-L}^L \mathbf{C} \, dx \, dz = \mathbf{C}_0, \quad (4.71)$$

где  $\mathbf{C}_0$  — средняя концентрация смеси.

Предполагается, что отношение высоты слоя к ширине  $H/L$  достаточно большое. Если разность температур между стенками не слишком большая, то жидкость движется строго в вертикальном направлении (см. рис. 4.13) за

исключением областей вблизи верхнего и нижнего концов слоя. Общий вид решения, описывающего движение в основной части слоя, дается формулами

$$\mathbf{u} = (0, w(x)), \quad T = T_0 + T(x), \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}(x). \quad (4.72)$$

Это решение принадлежит к классу инвариантных решений ранга 1 относительно подгруппы, порождаемой операторами

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad H_3(1) = \frac{\partial}{\partial z},$$

см. (3.28), (3.29). В решениях этого класса все функции зависят только от  $x$ . Формулы (4.72) соответствуют частному случаю  $u = 0$ .

Введем безразмерные переменные согласно (4.2). Отбрасывая для простоты верхние индексы у безразмерных переменных, получим безразмерные уравнения движения в виде (4.3), где вместо числа Рэлея будем использовать число Грасгофа  $\text{Gr} = \text{Pr}^{-1}\text{Ra}$ . Представление (4.72) записывается в безразмерных переменных следующим образом:

$$\mathbf{u} = (0, w(x)), \quad T = T(x), \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}(x),$$

а условия (4.69)–(4.71) принимают вид

$$\begin{aligned} x = \pm 1 : \quad u = w = 0, \quad T = \pm 1, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} - \boldsymbol{\psi} \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \\ \int_{-1}^1 w dx = 0, \quad \int_{-1}^1 \mathbf{C} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Стационарное решение, удовлетворяющее указанным условием, легко находится:

$$w_s = \frac{\text{Gr}(\Psi + 1)}{6}(x - x^3), \quad T_s = x, \quad \mathbf{C}_s = \boldsymbol{\psi}x, \quad (4.74)$$

$$\rho_s = -(\Psi + 1)x. \quad (4.75)$$

Здесь  $\boldsymbol{\psi}$  — вектор отношений разделения,  $\Psi$  — суммарное отношение разделения, определяемые формулами (2.25) и (2.26) соответственно. Нижний индекс  $s$  указывает на стационарное состояние. В решении (4.74) горизонтальный градиент температуры вызывает разделение смеси благодаря эффекту Сопе. Вер-

тикальная конвекция вызвана неоднородностью плотности в горизонтальном направлении.

Движение, описываемое формулами (4.74), можно экспериментально наблюдать в термодиффузионной колонне. Эта экспериментальная установка представляет собой длинный плоский вертикальный слой, между боковыми стенками которого приложена разность температур (подробное описание колонны приводится ниже в пункте 5.1.1). В начале эксперимента колонна заполняется однородной смесью, после чего происходит установление горизонтального градиента температуры. Заметим, что в жидких смесях характерное время диффузии значительно меньше характерного времени теплопроводности. Поэтому в течение некоторого времени после начала эксперимента вертикальная конвекция в колонне вызвана только неоднородностью температуры. Соответствующий профиль скорости может быть найден из уравнения импульса, в котором следует пренебречь зависимостью плотности от концентрации. В безразмерных переменных скорость принимает вид

$$w = \frac{Gr}{6}(x - x^3). \quad (4.76)$$

Со временем в колонне формируются горизонтальные градиенты концентрации благодаря эффекту Соре. Этот режим описывается решением (4.74), в котором конвекция обусловлена как неоднородностью температуры, так и неоднородностью концентрации. Данный режим существует в течение некоторого времени и постепенно сменяется другим режимом. Горизонтальное разделение смеси и вертикальное конвективное движение приводят к формированию вертикальных градиентов концентрации. Когда система достигает стационарного состояния, эти градиенты принимают постоянные значения (т.е. распределение концентрации по вертикали становится линейным). Этот режим будет подробно изучен в главе 5. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что стационарный профиль скорости в колонне может быть описан формулой (4.76) с хорошей точностью в достаточно широком диапазоне значений суммарного отношения разделения ( $-1 < \Psi < 2$ ) [31, 70]. Для положительных  $\Psi$  переход от режима течения (4.76) к (4.74) и обратно приводит

сначала к увеличению, а затем к уменьшению скорости конвективного движения. Данные об изменении скорости конвекции со временем могут быть использованы для определения коэффициента термодиффузии в бинарных смесях [31].

Приведенные рассуждения показывают, что режим течения (4.74) может наблюдаться в термодиффузионной колонне на начальном этапе процесса разделения. Если конвективная неустойчивость развивается на этом этапе, то дальнейшее разделение становится невозможным. Таким образом, задача об устойчивости решения (4.74) имеет не только теоретическое, но и практическое значение.

Представим поля скорости, давления, температуры и концентрации в виде суммы основного движения (4.74) и малых возмущений. Линеаризуем уравнения (4.3) относительно основного состояния. Можно показать, что к рассматриваемой задаче применим аналог преобразования Сквайра [297]. Поэтому плоские возмущения, зависящие от  $t, x, z$ , являются более опасными, чем трехмерные возмущения. Введем функцию тока  $\Phi$  формулой  $\mathbf{u} = (u, w) = (-\partial\Phi/\partial z, \partial\Phi/\partial x)$ . Будем рассматривать нормальные возмущения вида

$$(\Phi, T, \mathbf{C}) = (\varphi(x), \theta(x), \boldsymbol{\xi}(x)) \exp(-\lambda t + ikz),$$

где  $\lambda$  — комплексный декремент,  $k$  — волновое число в направлении оси  $z$ . Амплитудные уравнения получаются путем подстановки этих возмущений в линеаризованные уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \varphi + ik(w_s'' \varphi - w_s \Delta \varphi) + \text{Gr}(\theta' + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi}') &= -\lambda \Delta \varphi, \\ \text{Pr}^{-1} \Delta \theta + ik(T_s' \varphi - w_s \theta) &= -\lambda \theta, \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\mathcal{SC}(\Delta \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\psi} \Delta \theta) + ik(\mathbf{C}'_s \varphi - w_s \boldsymbol{\xi}) = -\lambda \boldsymbol{\xi},$$

$$x = \pm 1 : \quad \varphi = \varphi' = 0, \quad \theta = 0, \quad \boldsymbol{\xi}' - \boldsymbol{\psi} \theta' = 0, \quad (4.78)$$

где  $\Delta = \partial_{xx} - k^2$ , а штрих соответствует производной  $\partial_x$ . Границные условия (4.78) следуют из (4.73).

Рассматриваемая задача может быть сведена к задаче с диагональной матрицей  $\mathcal{SC}$  с помощью метода, описанного в пункте 3.3.2. Условия Теоремы

3.1 из данного пункта здесь выполнены. В дальнейшем предполагается, что безразмерная матрица диффузии  $\mathcal{SC}$  является диагональной.

#### 4.2.2 Решение для длинноволновых возмущений

Для исследования устойчивости относительно длинноволновых возмущений будем искать решение в виде ряда по степеням волнового числа  $k$ , которое предполагается малым:

$$(\varphi, \theta, \boldsymbol{\xi}, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (\varphi_m, \theta_m, \boldsymbol{\xi}_m, \lambda_m) k^m.$$

Подставляя это разложение в уравнения (4.77) и приравнивая к нулю множители при степенях  $k$ , получим серию систем уравнений на коэффициенты разложения (границные условия для всех систем совпадают с (4.78)). Система нулевого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_0''' + \text{Gr}(\theta'_0 + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi}'_0) &= -\lambda_0 \varphi''_0, \\ \text{Pr}^{-1} \theta''_0 &= -\lambda_0 \theta_0, \\ \mathcal{SC}(\boldsymbol{\xi}''_0 - \boldsymbol{\psi} \theta''_0) &= -\lambda_0 \boldsymbol{\xi}_0. \end{aligned}$$

Анализ данной системы показывает, что все собственные функции соответствуют затухающим возмущениям за исключением нейтральных возмущений концентрационного типа:

$$\lambda_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \theta_0 = 0, \quad \boldsymbol{\xi}_0 = \text{const.} \quad (4.79)$$

Здесь  $\boldsymbol{\xi}_0$  есть постоянный вектор.

С учетом решения (4.79) система первого порядка записывается в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1''' + \text{Gr}(\theta'_1 + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi}'_1) &= 0, \\ \theta''_1 &= 0, \\ \mathcal{SC}(\boldsymbol{\xi}''_1 - \boldsymbol{\psi} \theta''_1) - i w_s \boldsymbol{\xi}_0 &= -\lambda_1 \boldsymbol{\xi}_0. \end{aligned}$$

Условие разрешимости данной системы получается путем интегрирования последнего уравнения на интервале от  $x = -1$  до  $x = 1$  с учетом граничных

условий (4.78). В результате получаем  $\lambda_1 = 0$ . Решение системы первого порядка имеет вид

$$\lambda_1 = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad (4.80)$$

$$\varphi_1 = \frac{i\text{Gr}^2(\Psi + 1)}{120960}(x^2 - 1)^2(3x^4 - 22x^2 + 163)\mathbf{I} \cdot \mathcal{SC}^{-1}\boldsymbol{\xi}_0,$$

$$\boldsymbol{\xi}_1 = -\frac{i\text{Gr}(\Psi + 1)}{360}(3x^5 - 10x^3 + 15x)\mathcal{SC}^{-1}\boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\xi}_1^*,$$

где  $\boldsymbol{\xi}_1^*$  есть постоянный вектор.

С учетом решения (4.80) система второго порядка принимает вид

$$\varphi_2''' + i(w_s''\varphi_1 - w_s\varphi_1'') + \text{Gr}(\theta_2' + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi}_2') = 0,$$

$$\text{Pr}^{-1}\theta_2'' + i\varphi_1 = 0,$$

$$\mathcal{SC}(\boldsymbol{\xi}_2'' - \boldsymbol{\psi}\theta_2'' - \boldsymbol{\xi}_0) + i(\boldsymbol{\psi}\varphi_1 - w_s\boldsymbol{\xi}_1) = -\lambda_2\boldsymbol{\xi}_0.$$

Интегрируя последнее уравнение на интервале от  $x = -1$  до  $x = 1$ , находим

$$\left[ \frac{2\text{Gr}^2(\Psi + 1)}{2835} (\Upsilon + (\Psi + 1)E) \mathcal{SC}^{-1} + \mathcal{SC} - \lambda_2 E \right] \boldsymbol{\xi}_0 = 0. \quad (4.81)$$

Здесь  $\Psi$  есть суммарное отношение разделения,  $E$  — единичная матрица,  $\Upsilon$  — квадратная матрица размерности  $(n - 1) \times (n - 1)$ , каждый столбец которой совпадает с вектором отношений разделения  $\boldsymbol{\psi}$ . Из (4.81) следует, что ненулевое решение для вектора  $\boldsymbol{\xi}_0$  существует, если определитель соответствующей матрицы равен нулю:

$$\det \left[ \frac{2\text{Gr}^2(\Psi + 1)}{2835} (\Upsilon + (\Psi + 1)E) \mathcal{SC}^{-1} + \mathcal{SC} - \lambda_2 E \right] = 0. \quad (4.82)$$

Это условие дает уравнение для определения  $\lambda_2$ . Данное уравнение является полиномом степени  $n - 1$  относительно  $\lambda_2$ . Таким образом, для смеси из  $n$  компонент существует  $n - 1$  собственное значение (с точностью до  $\lambda \approx \lambda_2 k^2$ ).

В случае  $\text{Gr} = 0$  из (4.82) следует  $\det(\mathcal{SC} - \lambda_2 E) = 0$ . Согласно определению матрицы  $\mathcal{SC}$  (см. (2.35)), ее собственные значения получаются путем умножения собственных значений матрицы  $D$  на  $\nu^{-1} > 0$ . Так как последние всегда вещественны и положительны [285, 290], все длинноволновые возмущения при  $\text{Gr} = 0$  затухают (равенство нулю числа Грасгофа может соответствовать изотермическому слою или состоянию невесомости). Аналогичная

ситуация наблюдается в случае  $\Psi = -1$ , где неоднородности плотности, вызванные изменениями температуры и концентрации, взаимно компенсируются. В результате в слое устанавливается состояние механического равновесия, см. (4.74) и (4.75).

### 4.2.3 Бинарная смесь

Для бинарной смеси  $\mathcal{SC} = \text{Sc}^{-1}$ ,  $E = 1$ ,  $\Psi = \Upsilon \equiv \psi$ , где  $\text{Sc} = \nu/\mathcal{D}$  — число Шмидта и  $\psi = -\beta_C \mathcal{D}_T / (\beta_T \mathcal{D})$  — отношение разделения. Из уравнения (4.82) следует

$$\lambda_2 = \frac{1}{\text{Sc}} + \frac{2\text{Gr}^2 \text{Sc}}{2835}(\psi + 1)(2\psi + 1).$$

Так как  $\lambda_2$  является вещественным, возможна только монотонная неустойчивость. Критическое число Грасгофа дается формулой

$$\text{Gr}^2 = -\frac{2835}{2\text{Sc}^2(\psi + 1)(2\psi + 1)}.$$

Монотонная неустойчивость имеет место при  $-1 < \psi < -1/2$ . Данные результаты были впервые получены в работе [171].

### 4.2.4 Многокомпонентная смесь

Будем предполагать, что безразмерная диффузионная матрица является диагональной  $\mathcal{SC} = \text{diag}\{\text{Sc}_1^{-1}, \dots, \text{Sc}_{n-1}^{-1}\}$  или приведена к диагональному виду с помощью преобразования (3.34). Сформулируем и докажем следующие теоремы.

**Теорема 4.4.** Основное состояние (4.74) устойчиво относительно длинноволновых возмущений ( $\text{Re } \lambda_2 > 0$ ) в следующих случаях:

1.  $\psi_i \geqslant 0$  (т.е.  $\Psi = \psi_1 + \dots + \psi_{n-1} \geqslant 0$ );
2.  $\psi_i \leqslant 0$  и  $-1/2 \leqslant \Psi \leqslant 0$ ;
3.  $\psi_i \leqslant -1/2$  и  $\Psi < -1$ ;
4.  $\Psi = -1$ .

Указанные условия должны выполняться для всех  $i = 1, \dots, n - 1$ .

**Доказательство.** Для оценки вещественной части  $\lambda_2$  воспользуемся следующим утверждением [293]: *Собственные значения матрицы  $A \equiv \{a_{ij}\}$  размерности  $(n - 1) \times (n - 1)$  удовлетворяют неравенству*

$$\min_j \left( \operatorname{Re} a_{jj} - \sum_{i=1, i \neq j}^{n-1} |a_{ij}| \right) \leqslant \operatorname{Re} \lambda \leqslant \max_j \left( \operatorname{Re} a_{jj} + \sum_{i=1, i \neq j}^{n-1} |a_{ij}| \right). \quad (4.83)$$

Согласно (4.82)  $\lambda_2$  является собственным значением матрицы

$$A = \frac{2\operatorname{Gr}^2(\Psi + 1)}{2835} \left( \Upsilon + (\Psi + 1)E \right) \mathcal{SC}^{-1} + \mathcal{SC}$$

с элементами

$$a_{ij} = \frac{2\operatorname{Gr}^2 \operatorname{Sc}_j (\Psi + 1) (\psi_i + \delta_{ij}(\Psi + 1))}{2835} + \frac{\delta_{ij}}{\operatorname{Sc}_j},$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Предположим, что  $\psi_i \geqslant 0$ , тогда  $\Psi \geqslant 0$ . Применим неравенство (4.83) к матрице  $A$ . В результате получим

$$\min_j P_j^- \leqslant \operatorname{Re} \lambda_2 \leqslant \max_j P_j^+, \quad (4.84)$$

где

$$P_j^- = \frac{2\operatorname{Gr}^2 \operatorname{Sc}_j (\Psi + 1)(2\psi_j + 1)}{2835} + \frac{1}{\operatorname{Sc}_j}, \quad P_j^+ = \frac{2\operatorname{Gr}^2 \operatorname{Sc}_j (\Psi + 1)(2\Psi + 1)}{2835} + \frac{1}{\operatorname{Sc}_j}.$$

Если отношения разделения для всех компонентов неотрицательны, то  $P_j^- > 0$ , поэтому  $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$ , и система является устойчивой. Первая часть теоремы доказана.

Теперь рассмотрим случай  $\psi_i \leqslant 0$  и, соответственно,  $\Psi \leqslant 0$ . Если  $-1 < \Psi \leqslant 0$ , то из (4.83) следует

$$\min_j P_j^+ \leqslant \operatorname{Re} \lambda_2 \leqslant \max_j P_j^-.$$

В указанной области значений  $\Psi$  выражения  $P_j^+$  всегда положительны при  $-1/2 \leqslant \Psi \leqslant 0$  (для других значений  $\Psi$  данные выражения становятся отрицательными при достаточно больших значениях  $\operatorname{Gr}$ ). Отсюда следует справедливость второй части теоремы. Если  $\Psi < -1$ , то получается оценка (4.84). Третья часть теоремы следует из того, что нижние границы выражений  $P_j^-$

всегда положительны только при  $\psi_j \leq -1/2$ . Наконец, случай  $\Psi = -1$  был уже исследован в пункте 4.2.2. ■

**Теорема 4.5.** Основное состояние (4.74) устойчиво относительно длинноволновых монотонных возмущений ( $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$  при условии  $\operatorname{Im} \lambda_2 = 0$ ) если  $\psi_i \leq 0$  для всех  $i = 1, \dots, n-1$  и  $\Psi < -1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим случай монотонных возмущений ( $\operatorname{Im} \lambda_2 = 0$ ). В предположении  $\Psi \neq -1$  и  $\operatorname{Gr} \neq 0$  (эти случаи были рассмотрены выше) уравнение (4.82) можно переписать в виде

$$\det A' = 0, \quad (4.85)$$

$$A' = \frac{1}{\Psi + 1} \Upsilon + E + \frac{2835}{2\operatorname{Gr}^2(\Psi + 1)^2} \mathcal{SC} (\mathcal{SC} - \lambda_2 E).$$

Элементы матрицы  $A'$  даются формулами

$$a'_{ij} = \frac{\psi_i}{\Psi + 1} + \delta_{ij} K_j, \quad K_j = 1 + \frac{2835 (\operatorname{Sc}_j^{-1} - \lambda_2)}{2\operatorname{Gr}^2 \operatorname{Sc}_j (\Psi + 1)^2}.$$

Для вычисления определителя преобразуем матрицу  $A'$  следующим образом. Вычтем из каждого столбца матрицы следующий по порядку столбец. В результате только последний столбец матрицы останется неизменным. Вычислим определитель матрицы с помощью разложения по данному столбцу. Подматрицы, определители которых необходимо вычислить при данном разложении, являются треугольными. В результате получим

$$\det A' = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\psi_i}{\Psi + 1} \prod_{j=1, j \neq i}^{n-1} K_j + \prod_{j=1}^{n-1} K_j. \quad (4.86)$$

В пункте 4.2.2 было показано, что все собственные значения  $\lambda_2$  вещественны и положительны в случае  $\operatorname{Gr} = 0$ . С ростом  $\operatorname{Gr}$  собственные значения могут изменить знак, т.е. система может стать неустойчивой. Граница устойчивости определяется из условия  $\lambda_2 = 0$ . Предположим, что условия Теоремы 4.5 выполнены и  $\lambda_2 = 0$ . Тогда  $K_j > 0$ , и из (4.86) следует  $\det A' > 0$ , т.е.  $\lambda_2 = 0$  не является собственным значением матрицы  $A'$ . Отсюда следует, что  $\lambda_2$  всегда положительно, поэтому система устойчива. ■

**Теорема 4.6.** Если все числа Шмидта одинаковы ( $\operatorname{Sc}_i \equiv \operatorname{Sc}$ ), то основное состояние (4.74) устойчиво относительно длинноволновых возмущений при

$\Psi \notin (-1, -1/2)$  и неустойчиво в противном случае. Критическое число Грасгофа дается формулой

$$\text{Gr}^2 = -\frac{2835}{2\text{Sc}^2(\Psi + 1)(2\Psi + 1)}. \quad (4.87)$$

**Доказательство.** В предположении, что условия теоремы выполнены, характеристическое уравнение (4.85) может быть легко решено с помощью формулы (4.86). В результате чего определяются собственные значения

$$\begin{aligned}\lambda_{2i} &= \frac{1}{\text{Sc}} + \frac{2\text{Gr}^2 \text{Sc} (\Psi + 1)^2}{2835} > 0, \quad i = 1, \dots, n-2, \\ \lambda_{2,n-1} &= \frac{1}{\text{Sc}} + \frac{2\text{Gr}^2 \text{Sc} (\Psi + 1)(2\Psi + 1)}{2835}.\end{aligned}$$

Собственное значение  $\lambda_{2,n-1}$  положительно, если  $\Psi \notin (-1, -1/2)$ . В противном случае  $\lambda_{2,n-1}$  становится отрицательным, когда число Грасгофа превышает критическое значение (4.87). ■

Сформулируем кратко полученные результаты. Теоремы 4.4 и 4.5 утверждают, что если все отношения разделения  $\psi_i$  имеют одинаковые знаки, то основное состояние устойчиво относительно длинноволновых возмущений при  $\Psi \notin (-1, -1/2)$ , где  $\Psi$  есть суммарное отношение разделения. Это утверждение имеет одно исключение: для отрицательных  $\psi_i$  и  $\Psi < -1$  устойчивость установлена только для случая монотонных возмущений (Теорема 4.5). В общем случае монотонных и колебательных возмущений для устойчивости системы необходимо выполнение более сильного требования  $\psi_i \leq -1/2$ . Эти результаты существенно обобщают предыдущие исследования бинарных смесей, в которых длинноволновая неустойчивость имела место лишь в области  $-1 < \psi < -1/2$  [171]. Согласно Теореме 4.6, если все собственные значения матрицы  $\mathcal{SC}$  одинаковы (т.е. все компоненты имеют одинаковые диффузионные свойства), то неустойчивость существует в той же области значений  $\Psi$ . В этом случае многокомпонентная смесь ведет себя подобно бинарной смеси.

Для обобщения полученных результатов на случай недиагональной матрицы  $\mathcal{SC}$  необходимо сделать замену отношений разделения согласно (3.36). Так как суммарное отношение разделения  $\Psi$  инвариантно относительно данной замены (см. Утверждение 3.2 в пункте 3.3.2), то интервал значений  $\Psi$ ,

в котором имеет место неустойчивость, не зависит от эффекта перекрестной диффузии.

#### 4.2.5 Механизм неустойчивости

Обсудим физический механизм возникновения длинноволновой неустойчивости в многокомпонентной смеси. В изотермическом слое или в условиях невесомости  $Gr = 0$ , и основное течение отсутствует. При этом имеются лишь затухающие возмущения плотности  $\rho^* \sim -\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi}_0 \exp(ikz)$ , вызванные концентрационными волнами в вертикальном направлении (см. пункт 4.2.2). В случае  $Gr \neq 0$  основное течение (см. рис. 4.13) взаимодействует с этими волнами, сдвигая их в верхнем и нижнем направлениях в правой и левой частях слоя соответственно. В результате возникают возмущения плотности, неоднородные в вертикальном и горизонтальном направлениях. Типичная структура возмущений плотности в тройной смеси приведена на рис. 4.14 (б) (указанные значения безразмерных параметров выбраны из соображений, описанных ниже в пункте 4.2.6). Возмущения плотности приводят к появлению возмущений скорости в форме вихрей, возникающих за счет движения более легкой и более тяжелой жидкости в верхнем и нижнем направлениях соответственно (сила тяжести направлена вниз), см. рис. 4.14 (а). В результате суперпозиции этих вихрей и основного течения образуются конвективные ячейки, вертикальный размер которых много больше толщины слоя.

Возникшие возмущения могут затухать или нарастать со временем. В основном состоянии в слое имеется горизонтальная стратификация по температуре и концентрации, см. решение (4.74). Если малый элемент жидкости случайным образом смещается в горизонтальном направлении, его плотность становится отличной от плотности окружающей жидкости. Возникающая при этом сила плавучести вызывает движение элемента жидкости в вертикальном направлении, что может привести к развитию неустойчивости. Со временем происходит выравнивание температуры и концентрации между жидким элементом и его окружением. Во течение этого процесса разность плотностей и,

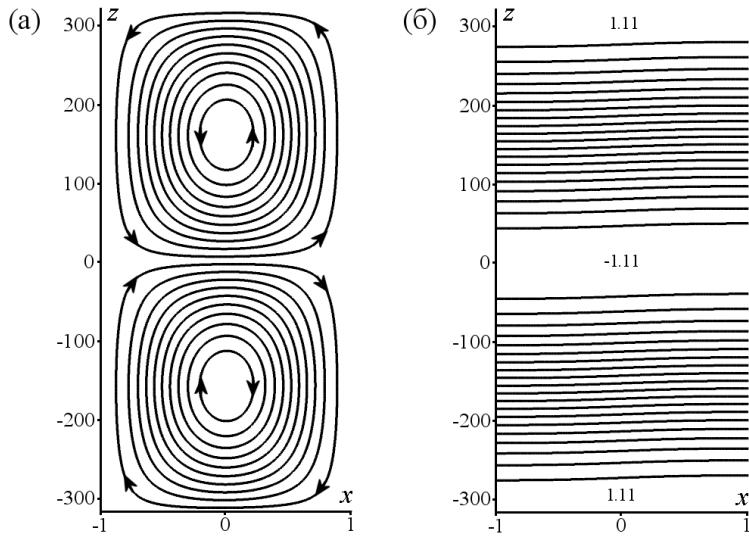


Рис. 4.14. Структура возмущений скорости (а) и плотности (б) для тройной смеси с параметрами  $\Psi = -0.75$ ,  $\psi_1 = 0.1$ ,  $s = Sc_1/Sc_2 = 0.5$ ,  $Sc_1 = 500$ ,  $Pr = 10$ .

Число Грасгофа  $Gr = 0.11$ , волновое число  $k = 0.01$ .

соответственно, сила плавучести, действующая на элемент жидкости, могут уменьшиться или увеличиться. Заметим, что характерное время теплопроводности, а также характерные времена диффузии для различных компонентов смеси могут существенно отличаться друг от друга.

В работах [37, 171] было показано, что описанный выше механизм приводит к развитию длинноволновых возмущений в бинарной смеси. В данном пункте эти рассуждения обобщаются на случай многокомпонентной смеси. Ниже будет предложена простая модель, описывающая временную эволюцию плотности элемента жидкости, смещенного в горизонтальном направлении. Как будет показано в дальнейшем, эта модель позволяет объяснить зависимость критического числа Грасгофа от физических параметров смеси.

Рассмотрим элемент жидкости с характерным размером  $R$ , объемом  $V$  и площадью поверхности  $S$ . Предполагается, что этот элемент достаточно мал и может быть охарактеризован значениями температуры  $T$  и вектора концентраций  $\mathbf{C}$  в каждый момент времени. В начальный момент элемент находится в точке  $x = x_1$  и имеет температуру  $T = T_1$  и концентрацию  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1$  (речь идет о размерных значениях переменных). Предположим, что элемент случайным образом перемещается в горизонтальном направлении в точку  $x = x_2$ , где

жидкость имеет температуру  $T_2$  и концентрацию  $\mathbf{C}_2$ . Тепломассообмен элемента жидкости с его окружением может быть описан следующей моделью:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \rho_0 V c_p (T - T_2) \right) &= -\kappa \frac{T - T_2}{R} S, \\ (T - T_2) \Big|_{t=0} &= T_1 - T_2, \\ \frac{d}{dt} \left( \rho_0 V (C_i - C_{2i}) \right) &= -\rho_0 D_{ii} \frac{C_i - C_{2i}}{R} S - \rho_0 D_{Ti} \frac{T - T_2}{R} S, \\ (C_i - C_{2i}) \Big|_{t=0} &= C_{1i} - C_{2i}, \end{aligned} \quad (4.88)$$

где  $i = 1, \dots, n - 1$ . Диффузионная матрица предполагается диагональной (в противном случае она приводится к диагональному виду преобразованием (3.34)). Уравнения (4.88) выражают тот факт, что скорость изменения количества теплоты и массы компонентов смеси равна тепловому и диффузионному потокам через поверхность элемента соответственно. Условия при  $t = 0$  задают начальную разность температур и концентраций. Учитывая, что  $V \sim R^3$  и  $S \sim R^2$  (для простоты коэффициентами пропорциональности можно пренебречь), решение задачи записывается в виде

$$T - T_2 = (T_1 - T_2) \exp(-t/\tau_\theta), \quad (4.89)$$

$$C_i - C_{2i} = (C_{1i} - C_{2i}) \exp(-t/\tau_i) - \frac{D_{Ti} (T_1 - T_2)}{D_{ii} (\tau_i / \tau_\theta - 1)} \left( \exp(-t/\tau_i) - \exp(-t/\tau_\theta) \right),$$

где  $\tau_\theta = R^2 / \chi$  — тепловое время ( $\chi = \kappa / \rho_0 c_p$ ),  $\tau_i = R^2 / D_{ii}$  — диффузионное время компонента  $i$ . Введем безразмерное время  $\tau = t / \tau_\theta$ , а также безразмерные температуру и вектор концентраций согласно (4.2). Заметим, что выражения  $T_1 - T_2$  и  $C_{1i} - C_{2i}$  характеризуют разность температур и концентраций между точками  $x = x_1$  и  $x = x_2$  в основном состоянии. Безразмерный вид последнего дается формулами (4.74). Используя (4.2) и (4.89), найдем безразмерную разность плотностей между элементом жидкости и его окружением и отнесем ее к величине смещения  $\Delta x = (x_2 - x_1)/L$ :

$$\frac{\Delta \rho^*}{\Delta x} = \exp(-\tau) + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i F_i(\tau), \quad (4.90)$$

$$F_i(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_i/\tau_\theta}\right) + \frac{1}{\tau_i/\tau_\theta - 1} \left( \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_i/\tau_\theta}\right) - \exp(-\tau) \right).$$

Здесь  $\psi_i$  есть отношение разделения компонента  $i$ . Учитывая, что  $\tau_i/\tau_\theta > 0$ , можно легко доказать следующее утверждение:

**Утверждение 4.1.** Функции  $F_i$  удовлетворяют неравенству  $e^{-\tau} < F_i(\tau) < 1$  и монотонно убывают при с ростом  $\tau$  в области  $\tau > 0$ . Кроме этого,  $F_i(0) = 1$ .

Предложенная модель позволяет объяснить результаты Теорем 4.4—4.6 с физической точки зрения. В пункте 4.2.3 было показано, что бинарная смесь устойчива относительно длинноволновых возмущений, если  $\psi \notin (-1, -1/2)$ . Далее было установлено, что многокомпонентная смесь также устойчива, если  $\Psi \notin (-1, -1/2)$  и все отношения разделения имеют одинаковые знаки (с некоторым исключением, см. пункт 4.2.4). Если все  $\psi_i$  положительны, то более легкие (более тяжелые) компоненты по отношению к растворителю концентрируются вблизи горячей (холодной) стенки. В случае отрицательных  $\psi_i$  наблюдается противоположная ситуация. В обоих случаях горизонтальные градиенты плотности, вызванные градиентами концентрации компонентов, имеют одинаковое направление. Таким образом, многокомпонентная смесь подобна бинарной смеси в плане стратификации по составу в слое. Поэтому область устойчивости не зависит от количества компонентов.

Используя выражение (4.90), можно показать, что ситуация, когда все  $\psi_i$  имеют одинаковые знаки, потенциально более устойчива, чем та, когда эти знаки различны. Очевидно, что при  $\psi_i \geq 0$  нормализованная разность плотностей и, соответственно, сила плавучести, действующая на смещенный элемент жидкости, монотонно убывают со временем (это следует из Утверждения 4.1). Поэтому вертикальное движение этого элемента замедляется и соответствующее возмущение затухает. В случае  $\psi_i \leq 0$  изменение разности плотностей со временем не является монотонным из-за наличия члена  $e^{-\tau}$ , описывающего выравнивание температуры. В жидких смесях, где тепло распространяется гораздо быстрее, чем происходят процессы диффузии, этот член затухает очень быстро. После этого разность плотностей монотонно стремится к нулю. Однако, если  $\psi_i$  имеют разные знаки, эта разность может

возрастать со временем или менять свой знак в зависимости от величин отношений разделения и диффузионных времен компонентов. Этот эффект будет более подробно обсуждаться ниже на примере тройной смеси.

#### 4.2.6 Длинноволновая неустойчивость в тройной смеси

Рассмотрим случай смеси из трех компонент. Предполагается, что матрица  $\mathcal{SC}$  является диагональной:  $\mathcal{SC} = \text{diag}\{\text{Sc}_1^{-1}, \text{Sc}_2^{-1}\}$ , где  $\text{Sc}_i = \nu/D_{ii}$  — числа Шмидта. Введем отношение  $s = \text{Sc}_1/\text{Sc}_2$  и исключим из уравнения (4.82) параметры, относящиеся ко второму компоненту смеси, с помощью соотношений  $\psi_2 = \Psi - \psi_1$  и  $\text{Sc}_2 = \text{Sc}_1/s$ . В результате получим квадратное уравнение для определения  $\lambda_2$ :

$$\begin{aligned} s \text{Sc}_1^2(\lambda_2)^2 - \frac{\text{Sc}_1}{2835} & \left( 2\text{Sc}_1^2(\Psi + 1)(\psi_1(s-1) + \Psi(s+2) + s+1)\text{Gr}^2 + \right. \\ & \left. + 2835s(s+1) \right) \lambda_2 + \frac{4\text{Sc}_1^4}{8037225}(\Psi + 1)^3(2\Psi + 1)\text{Gr}^4 + \\ & + \frac{2\text{Sc}_1^2}{2835}(\Psi + 1)(\psi_1(s^2 - 1) + \Psi(s^2 + 2) + s^2 + 1)\text{Gr}^2 + s^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Корни этого уравнения обозначим через  $\lambda_2^\pm$ . Без ограничения общности можно считать  $0 < s \leq 1$  (в противном случае следует изменить нумерацию компонентов). Параметр  $s$  можно интерпретировать как отношение диффузионных времен  $s = \tau_1/\tau_2$ , где  $\tau_i = L^2/D_{ii}$  и  $L$  есть характерный размер. Таким образом, указанное выше предположение означает, что диффузия первого компонента происходит быстрее, чем второго.

Для нахождения критических параметров монотонной неустойчивости положим  $\lambda_2 = 0$  в уравнении (4.91). При  $\Psi = -1$  это уравнение не имеет решения, так как в данном случае  $\lambda_2$  вещественно и положительно, см. пункт 4.2.2. При  $\Psi = -1/2$  решение дается формулой

$$(\text{Gr}_m^*)^2 = \frac{5670s^2}{\text{Sc}_1^2(2\psi_1(1-s^2) - s^2)}. \quad (4.92)$$

В остальных случаях уравнение имеет два корня:

$$(\text{Gr}_m^\pm)^2 = \frac{2835}{4\text{Sc}_1^2(\Psi + 1)^2(2\Psi + 1)} \left[ -(\psi_1(s^2 - 1) + \Psi(s^2 + 2) + s^2 + 1) \pm \right.$$

$$\pm \sqrt{\left( \psi_1(s^2 - 1) + \Psi(s^2 + 2) + s^2 + 1 \right)^2 - 4s^2(\Psi + 1)(2\Psi + 1)} \Big]. \quad (4.93)$$

Критические параметры колебательной неустойчивости определяются, если положить  $\lambda_2 = i\omega$  в (4.91). Критическое число Грасгофа дается формулой

$$(\text{Gr}_o)^2 = -\frac{2835s(s+1)}{2\text{Sc}_1^2(\Psi+1)(\psi_1(s-1) + \Psi(s+2) + s+1)}, \quad (4.94)$$

а критическая частота записывается в виде

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \left[ s(s+1)^2(\Psi+1)(2\Psi+1) - (\psi_1(s-1) + \Psi(s+2) + s+1) \times \right. \\ &\times \left. (\psi_1(s^3-1) + \Psi(s^3+2) + s^3+1) \right] \left[ \text{Sc}_1^2(\psi_1(s-1) + \Psi(s+2) + s+1)^2 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Заметим, что всегда имеются два критических числа Грасгофа, величины которых равны, а знаки противоположны. Отрицательное число Грасгофа соответствует подогреву слоя с противоположной стороны. Смена направления градиента температуры на противоположное не влияет на характеристики устойчивости рассматриваемой системы.

Область длинноволновой неустойчивости в пространстве параметров находится из условия того, что правые части формул (4.92)–(4.95), а также выражение под корнем в (4.93) должны быть положительными. Полное параметрическое исследование показывает, что область неустойчивости в пространстве параметров  $(\Psi, \psi_1, s)$  состоит из 5 зон. Эти зоны представлены на рис. 4.15 на плоскости  $(\Psi, \psi_1)$  при  $s = 0.5$ . Они имеют аналогичную структуру при  $0 < s \leq 1$  благодаря специальным свойствам границ, которые будут описаны ниже. Границы зон неустойчивости даются формулами

$$\begin{aligned} \psi_m^\pm &= \frac{\Psi(s^2 + 2) + s^2 + 1}{1 - s^2} \pm \frac{2s\sqrt{(\Psi+1)(2\Psi+1)}}{1 - s^2}, \\ \psi_o^\pm &= \frac{\Psi(2s^3 + 3s^2 + 3s + 4) + 2(s+1)(s^2 + 1)}{2(1 - s^3)} \pm \\ &\pm \frac{(s+1)\sqrt{s(4(s+1)^2(\Psi+1)(2\Psi+1) + s\Psi^2)}}{2(1 - s^3)}, \\ \psi_o^* &= \frac{\Psi(s+2) + s+1}{1 - s}, \quad \Psi' = -\frac{2(s+1)(3s+3 + \sqrt{s^2 + s + 1})}{8(s+1)^2 + s}. \end{aligned}$$

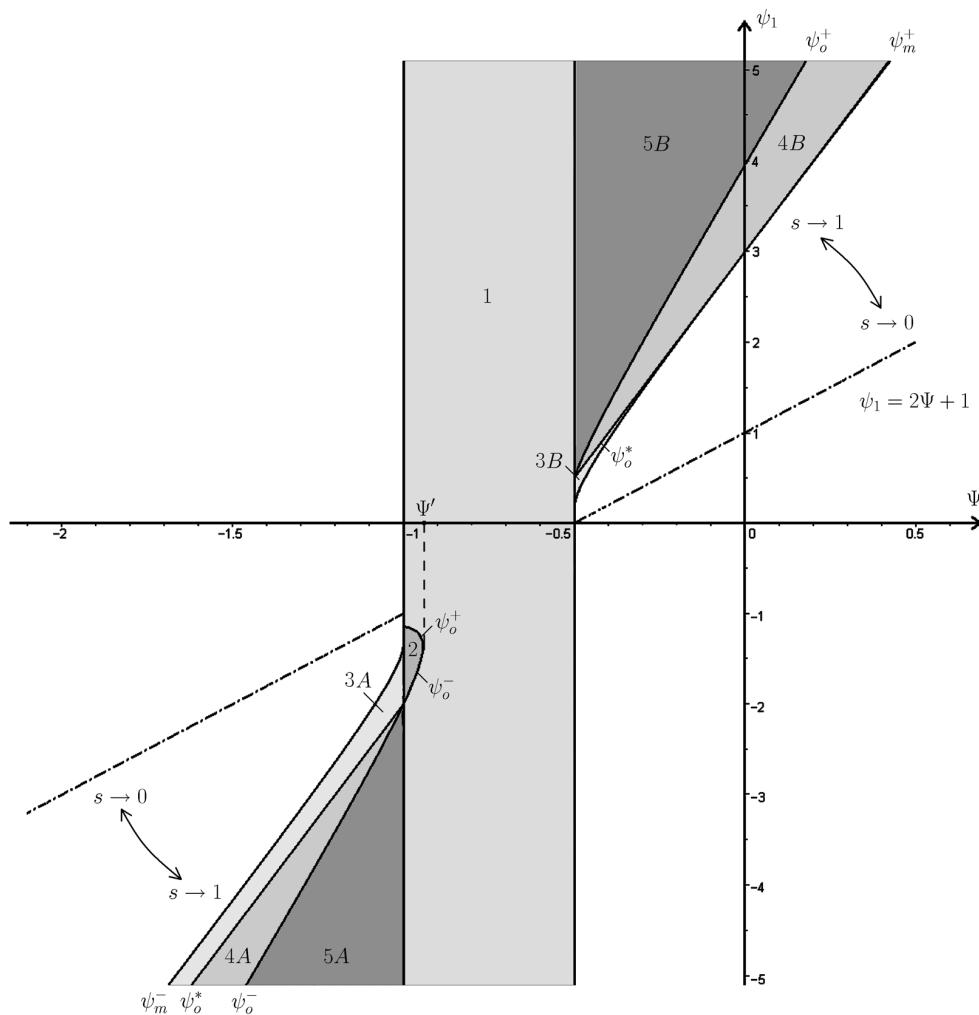


Рис. 4.15. Области неустойчивости на плоскости  $(\Psi, \psi_1)$  при  $s = 0.5$  (выделены более темным тоном). Стрелки показывают направление перемещения границ при изменении отношения диффузионных времен  $s = \tau_1/\tau_2$ .

Таблица 4.1. Области значений числа Грасгофа, при которых наблюдается неустойчивость. Для описания зон 3В–5В следует сделать замену  $\text{Gr}_m^+ \leftrightarrow \text{Gr}_m^-$ .

Зона	Монотонная неустойчивость	Колебательная неустойчивость
1	$\text{Gr} > \text{Gr}_m^-$	—
2	—	$\text{Gr} > \text{Gr}_o$
3A	$\text{Gr}_m^+ < \text{Gr} < \text{Gr}_m^-$	—
4A	$\text{Gr}_m^+ < \text{Gr} < \text{Gr}_m^-$	$\text{Gr} > \text{Gr}_o \geq \text{Gr}_m^-$
5A	$\text{Gr} > \text{Gr}_m^+$	—

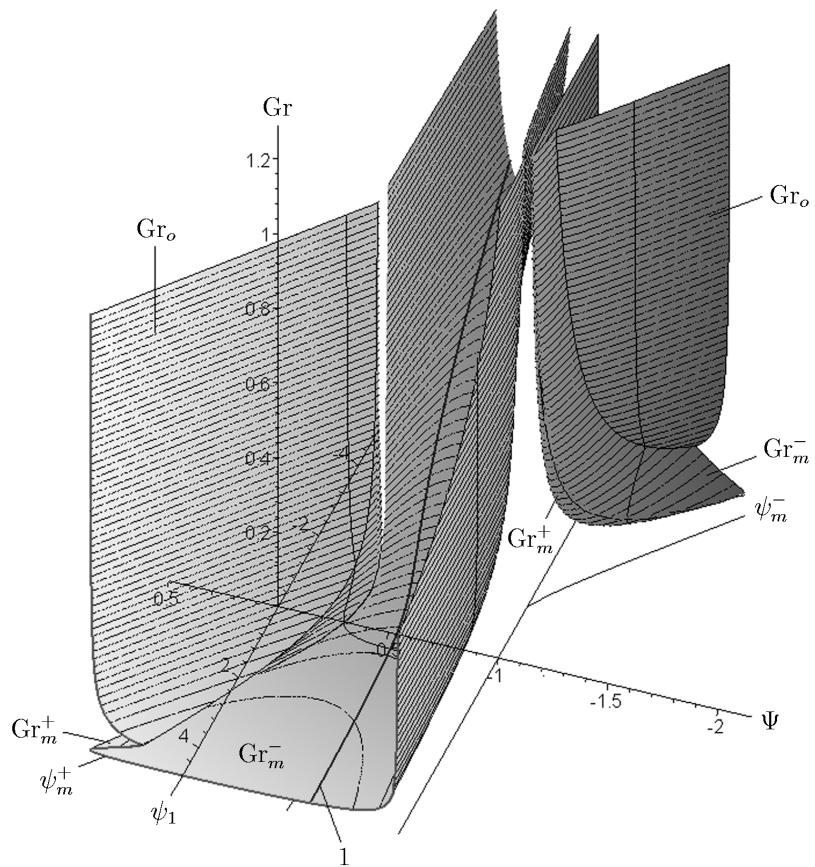


Рис. 4.16. Зависимость критических чисел Грасгофа от суммарного отношения разделения  $\Psi$  и отношения разделения первого компонента  $\psi_1$  при  $s = 0.5$ ,  $Sc_1 = 500$ .  
Плоскость  $(\Psi, \psi_1)$  показана на рис. 4.15.

Свойства этих границ описываются следующими утверждениями.

**Утверждение 4.2.** При  $0 < s < 1$  справедливы неравенства

$$0 > 2\Psi + 1 > \psi_m^- > \psi_o^* > \psi_o^- \quad \text{при } \Psi < -1; \quad (4.96)$$

$$0 < 2\Psi + 1 < \psi_m^+ < \psi_o^* < \psi_o^+ \quad \text{при } \Psi > -1/2; \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} \psi_o^* = \psi_o^- &= \frac{1}{s-1}, & \psi_m^- &= \frac{1}{s^2-1} & \text{при } \Psi = -1; \\ \psi_o^* = \psi_o^+ &= \frac{s}{2(1-s)}, & \psi_m^+ &= \frac{s^2}{2(1-s^2)} & \text{при } \Psi = -1/2. \end{aligned}$$

Границы областей в неравенствах (4.96) и (4.97) являются соответственно монотонно убывающими и монотонно возрастающими функциями параметра  $s$  при фиксированном  $\Psi$  (при условии, что  $\Psi$  удовлетворяет указанным нера-

венствам). Кроме этого,

$$\psi_m^\pm = \psi_o^* = \psi_o^\pm = 2\Psi + 1 \quad \text{при } s = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 1-0} \psi_m^\pm = \pm\infty.$$

Пределы  $\psi_m^-$  и  $\psi_m^+$  вычисляются в предположении  $\Psi < -1$  и  $\Psi > -1/2$  соответственно, см. рис. 4.15. ■

**Утверждение 4.3.** При  $0 \leq s \leq 1$  справедливо неравенство

$$-1 \leq \Psi' \leq \frac{-24 - 4\sqrt{3}}{33}.$$

Далее, при  $-1 < \Psi \leq \Psi'$  имеем

$$\psi_o^- \leq \psi_o^+ < \Psi, \quad \lim_{s \rightarrow 1-0} \psi_o^\pm = -\infty.$$

Кроме этого,

$$\lim_{\Psi \rightarrow -1/2} \text{Gr}_m^- = \text{Gr}_m^*.$$

Доказательство Утверждений 4.2 и 4.3 требует достаточно длинных вычислений и здесь не приводится. ■

Критические числа Грасгофа, ограничивающие области неустойчивости, представлены в Таблице 4.1, а их зависимость от  $\Psi$  и  $\psi_1$  показана на рис. 4.16. Заметим, что эти числа обратно пропорциональны числу Шмидта  $Sc_1$ . Как правило, числа Шмидта жидкостей имеют порядок  $Sc \sim 10^3$ , в то время как для газов —  $Sc \sim 1$  (диффузия в газах происходит значительно быстрее, чем в жидкостях). Поэтому жидкости менее устойчивы по отношению к длинноволновым возмущениям, чем газы.

Обсудим основные характеристики длинноволновой неустойчивости, используя рис. 4.15 и Утверждения 4.2 и 4.3. Прежде всего, монотонная неустойчивость имеет место в области  $-1 < \Psi < -1/2$  (зона 1). Если диффузионные времена компонентов смеси одинаковы ( $s = 1$ ), то неустойчивость существует только в этой области (тройная смесь ведет себя подобно бинарной смеси, см. Теорему 4.6 в пункте 4.2.4). Если же диффузионные времена компонентов различны ( $0 < s < 1$ ), то появляются дополнительные зоны неустойчивости 2—5. Они ограничены линиями  $\psi_1 = 2\Psi + 1$ ,  $\Psi = -1$  и  $\Psi = -1/2$ , см. рис. 4.15. Когда отношение диффузионных времен  $s$  меняется в направлении от 1

до 0, границы соответствующих секторов монотонно приближаются к линии  $\psi_1 = 2\Psi + 1$ . В предельном случае  $s = 0$  промежуточные зоны 3,4 исчезают и зона 5 занимает все пространство секторов. Таким образом, увеличение разности между диффузионными временами компонентов приводит к расширению области неустойчивости и появлению зоны 2, в которой неустойчивость является колебательной.

Заметим, что вне области  $-1 < \Psi < -1/2$  основное состояние может быть неустойчивым только если отношения разделения компонентов имеют разные знаки. В этом случае горизонтальные градиенты плотности, вызванные градиентами концентрации компонентов смеси, противоположны. Увеличивая абсолютную величину  $\psi_1$  при фиксированном  $\Psi$ , мы проходим через несколько зон с различными сценариями (см. Таблицу 4.1 и рис. 4.15, 4.16): монотонная неустойчивость в некотором интервале чисел Грасгофа (зона 3), переход от монотонной к колебательной неустойчивости с промежуточной стабилизацией (зона 4), монотонная неустойчивость при превышении числом Грасгофа некоторого критического значения (зона 5). На рис. 4.17 (а) показано типичное поведение реальных частей  $\lambda_2^\pm$  с ростом Gr в зоне 4A.

Для изучения поведения системы в зонах 1–5 при  $k > 0$  были проведены численные расчеты. Задача (4.77), (4.78) решалась методом пошагового интегрирования Рунге–Кутты–Мерсона 5 порядка точности с ортогонализацией [37, 292]. Как показывают расчеты, критическое волновое число для монотонной неустойчивости соответствует  $k = 0$ , в то время как критическое волновое число для колебательной неустойчивости в зонах 2 и 4 отлично от нуля. Типичное поведение нейтральных кривых в зоне 4A показана на рис. 4.17 (б). Структура длинноволновых монотонных возмущений скорости и плотности в зоне 1 ( $\Psi = -0.75$ ,  $\psi_1 = 0.1$ ) показана на рис. 4.14 (см. соответствующее описание в пункте 4.2.5). Значение числа Грасгофа взято слегка выше критического:  $Gr = 0.11 > Gr_c = 0.10$ .

Рассмотрим подробнее зависимость критического числа Грасгофа от физических параметров системы. Согласно рис. 4.16, критическое число Грасго-

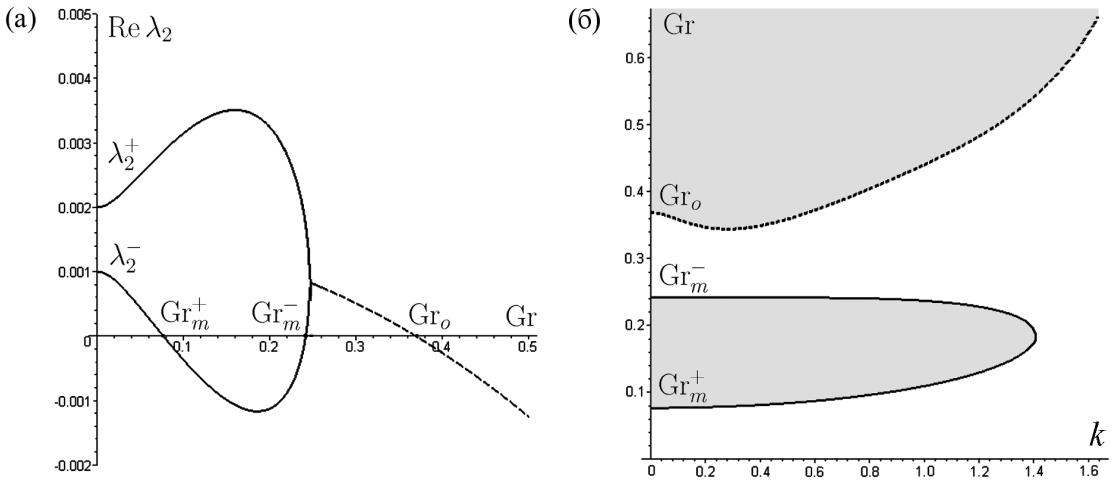


Рис. 4.17. (а) Поведение вещественных частей собственных значений  $\lambda_2^\pm$  в зоне 4А при  $k \rightarrow 0$ . Прерывистая линия соответствует вещественной части пары комплексно-сопряженных собственных значений. (б) Нейтральные кривые монотонной и колебательной неустойчивости.  $\Psi = -1.25$ ,  $\psi_1 = -3.5$ ,  $s = 0.5$ ,  $\text{Sc}_1 = 500$ ,  $\text{Pr} = 10$ .

фа уменьшается с ростом  $\psi_1$  в области  $-1 < \Psi < -1/2$  (см., например, кривую 1, соответствующую  $\Psi = -0.75$ ). Зависимость этого числа от отношения разделения  $\psi_1$  при  $\Psi = -0.75$  показана на рис. 4.18 для различных отношений диффузионных времен. Для объяснения данной зависимости обратимся к простой модели (4.88). Данная модель связывает рост или затухание возмущений с изменением разности плотностей между малым элементом смеси, смещенном в горизонтальном направлении, и окружающей его жидкостью со временем.

Эволюция разности плотностей (4.90) со временем показана на рис. 4.19 (а) для  $s = 0.1$ . Временная ось разделена на три интервала с различными масштабами, которые связаны с тепловым временем и диффузионными временами компонентов смеси (в результате такого разделения кривые выглядят так, как будто их производные терпят разрыв при переходе от одного масштаба к другому; на самом деле, кривые являются гладкими). Отношение диффузионного времени первого компонента к тепловому времени выбрано как  $\tau_1/\tau_\theta = 100$ , что является типичным для жидких смесей. В целом, чем большее величина разности плотностей и чем дольше эта разность сохраняет один и тот же знак, тем более неустойчивой является система. Согласно этому

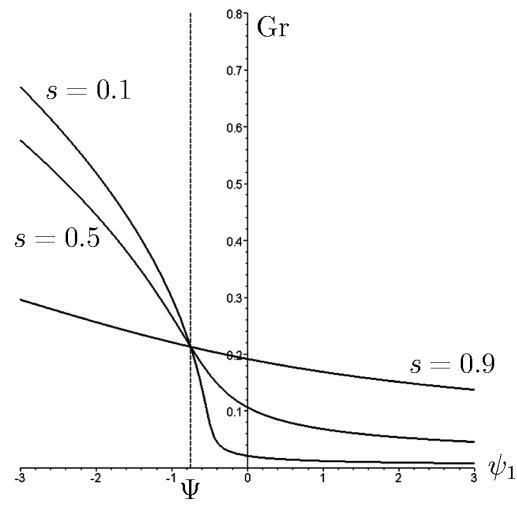


Рис. 4.18. Зависимость критического числа Грасгофа от отношения разделения  $\psi_1$  для различных отношений диффузионных времен  $s = \tau_1/\tau_2$ .  $\Psi = -0.75$ ,  $Sc_1 = 500$ .

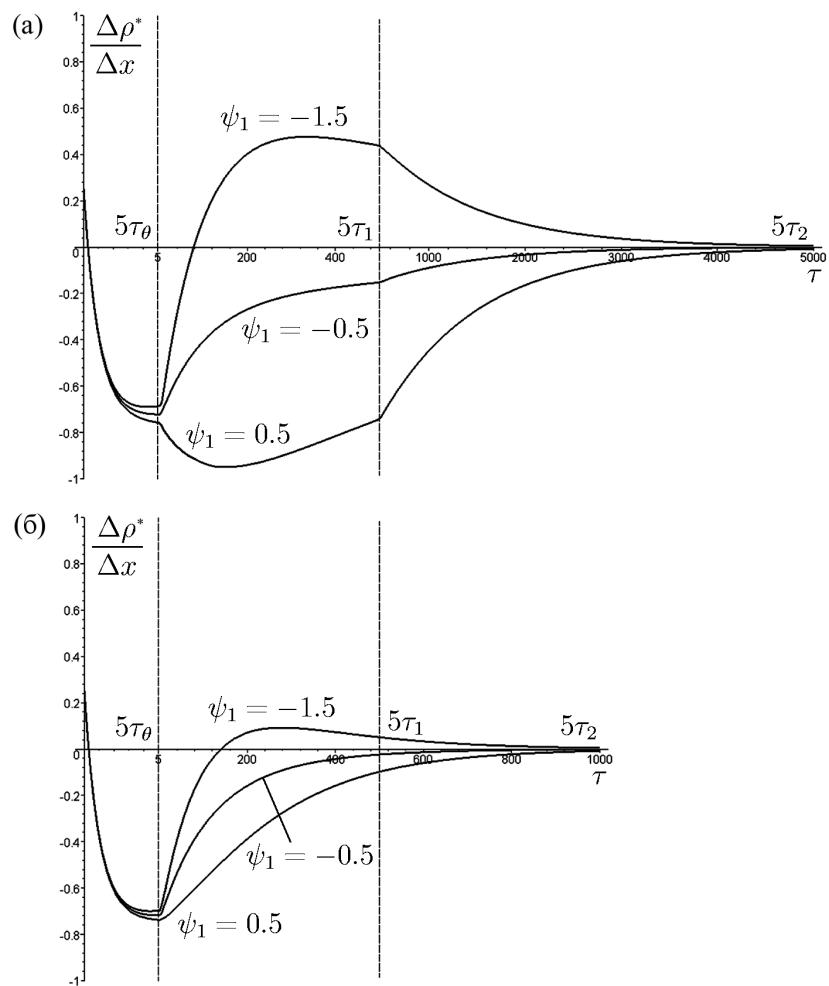


Рис. 4.19. Зависимость разности плотностей  $\Delta\rho^*/\Delta x$  от времени для различных отношений диффузионных времен  $s = \tau_1/\tau_2$ :  $s = 0.1$  (а) и  $s = 0.5$  (б).

$$\Psi = -0.75, \quad \tau_1/\tau_\theta = 100.$$

принципу, из рис. 4.19 (а) следует, что течение становится менее устойчивым с ростом  $\psi_1$ . Это объясняет поведение критического числа Грасгофа на рис. 4.18 при  $s = 0.1$ .

Рассмотрим теперь ситуацию, когда отношение диффузионных времен  $s = 0.5$ . Здесь выравнивание концентраций первого и второго компонентов между малым элементом смеси и его окружением происходит гораздо быстрее, см. рис. 4.19 (б). Заметим, что кривые на рис. 4.18, соответствующие различным отношениям диффузионных времен, пересекаются в точке  $\psi_1 = \Psi = -0.75$ . В данной точке термодиффузионное разделение второго компонента отсутствует ( $\psi_2 = 0$ ), поэтому критическое число Грасгофа не зависит от  $s$ . Как видно из рис. 4.18 и 4.19, в области  $\psi_1 > \Psi = -0.75$  система является более устойчивой при  $s = 0.5$ , чем при  $s = 0.1$ , так как в последнем случае величина разности плотностей больше, чем в первом. В области  $\psi_1 < -0.75$  разность плотностей меняет знак с отрицательного на положительный при  $\tau > 5\tau_\theta$ , см. рис. 4.19. Таким образом, сила плавучести меняет направление с течением времени (начальное всплытие элемента жидкости 'компенсируется' его последующим опусканием). Однако, величина этой 'компенсации' больше при  $s = 0.1$ , чем при  $s = 0.5$ . Поэтому последний случай является более неустойчивым, чем первый, что ясно видно из рис. 4.18. Заметим, что описанное изменение направления силы плавучести в области  $\psi_1 < \Psi$  может приводить к возникновению колебательной неустойчивости. Такая неустойчивость действительно наблюдается в указанной области, когда  $\Psi$  достаточно близко к  $-1$  и основное течение (4.74) практически отсутствует (зона 2 на рис. 4.15). В случае, когда диффузионные времена мало отличаются друг от друга ( $s = 0.9$ ), кривые, описывающие изменение разности плотностей с течением времени, лежат достаточно близко друг к другу (этот рисунок не показан). Поэтому критическое число Грасгофа меняется слабо с ростом  $\psi_1$ .

Приведенные выше рассуждения подтверждают, что механизм, описанный в пункте 4.2.5, действительно приводит к возникновению длинноволновых возмущений, а модель (4.88) позволяет правильно объяснить зависимость

критического числа Грасгофа от физических параметров системы.

Описанные выше результаты были получены для случая диагональной матрицы  $\mathcal{SC}$ . Для учета эффекта перекрестной диффузии необходимо сделать замену параметров по формулам (4.68). Так как  $\Psi$  инвариантно относительно этой замены (см. Утверждение 3.2 в пункте 3.3.2), длиноволновая неустойчивость в полосе  $-1 < \Psi < -1/2$  сохраняется при учете перекрестной диффузии.

## **Глава 5**

# **Разделение смесей в термодиффузионной колонне**

Данная глава посвящена теоретическому исследованию процессов переноса в термодиффузионной колонне — экспериментальной установке для разделения смесей и измерения коэффициентов термодиффузии. Используется формализм для описания конвекции и термодиффузии в многокомпонентных смесях с помощью отношений разделения. Найдено точное решение, описывающее стационарное разделение многокомпонентной смеси в плоской замкнутой колонне, и исследованы его свойства. Изучено влияние вертикальной диффузии и зависимости плотности от концентрации на конвекцию в колонне. Проведено исследование устойчивости стационарного течения в колонне для смеси из трех компонент. Построено точное решение, описывающее разделение бинарной смеси в колонне при наличии продольной вибрации. Показано, что найденные точные решения принадлежат к классу инвариантных решений уравнений движения. Результаты данной главы основаны на работах [70, 76, 77, 82, 86].

### **5.1 Разделение многокомпонентной смеси в плоской колонне**

#### **5.1.1 Постановка задачи**

Термодиффузионная колонна представляет собой экспериментальную установку для разделения смесей и измерения коэффициентов термодиффузии

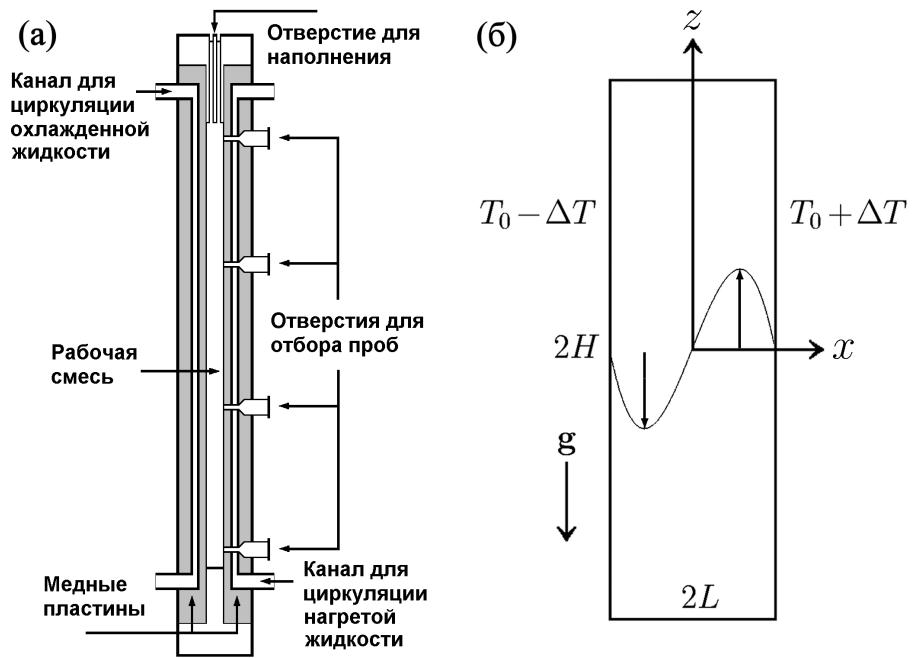


Рис. 5.1. Схема термодиффузионной колонны (а) и геометрия рабочей области (б).

[17, 18]. Подробный обзор экспериментальных и теоретических работ, посвященных исследованию процессов разделения в колонне, был дан в параграфе 1.1. В настоящее время ведутся активные исследования по измерению коэффициентов термодиффузии в бинарных и тройных смесях [28, 134, 286]. В связи с этим обобщение теории колонны на случай многокомпонентной смеси и исследование устойчивости процесса разделения является актуальной задачей. Эта задача может быть эффективно решена с помощью формализма для описания конвекции и термодиффузии, введенного в параграфе 2.2.

Схема плоской термодиффузионной колонны для измерения коэффициентов термодиффузии приведена на рис. 5.1 (а). В колонне смесь помещена в вертикальном канале между двумя плоскими медными пластинами. Пластины поддерживаются при различных постоянных температурах  $T_0 \pm \Delta T$  посредством циркуляции жидкости в специальных каналах. Геометрия рабочей области колонны показана на рис. 5.1 (б). Отношение высоты колонны к ее ширине имеет порядок  $H/L \sim 100$ , а отношение глубины к ширине —  $S/L \sim 10$ , где  $S$  — размер колонны в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. Колонна заполняется смесью через отверстие в верхней части.

В процессе работы она является замкнутой с обоих концов (сверху и снизу). Разность температур между стенками приводит к разделению смеси в горизонтальном направлении благодаря эффекту термодиффузии. В случае бинарной смеси один из компонентов концентрируется у нагретой границы, а другой — у холодной границы (как правило, разность концентраций между пластина-ми не превышает нескольких процентов). Наличие горизонтального градиента температуры в поле силы тяжести приводит к возникновению конвективного движения в вертикальном направлении. Жидкость вблизи нагретой границы поднимается вверх, а вблизи холодной границы — опускается вниз. Типичный профиль скорости в поперечном сечении колонны показан на рис. 5.1 (б). Благодаря конвективному движению, один из компонентов бинарной смеси перемещается в верхнюю часть колонны, а другой — в нижнюю. Когда система достигает стационарного состояния, в колонне устанавливается постоянный вертикальный градиент концентрации. Для его измерения берут пробы смеси на различных уровнях вдоль вертикального направления колонны и измеряют концентрацию смеси в них (например, путем измерения плотности). Сопоставление экспериментального значения вертикального градиента концентрации с теоретическим выражением, полученным из точного решения уравнений движения смеси, позволяет определить коэффициент термодиффузии.

Рассмотрим процесс разделения многокомпонентной смеси в плоской термодиффузионной колонне. Для описания движения смеси будем использовать модель Обербека–Буссинеска с уравнением состояния (2.31) (плотность смеси линейно зависит от температуры и концентрации компонентов). Уравнения движения многокомпонентной смеси в поле силы тяжести имеют вид (2.32). В данном параграфе используются двумерные уравнения с вектором координат  $\mathbf{x} = (x, z)$  и вектором скорости  $\mathbf{u} = (u, w)$ . В дальнейшем нам понадобится выражение для полного потока массы компонентов смеси, который является суммой конвективного потока массы  $\mathbf{J}_c = \rho_0(C_1\mathbf{u}, \dots, C_{n-1}\mathbf{u})^T$  и диффузионного потока, определяемого выражением (2.17):

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}_c - \rho_0(D\nabla\mathbf{C} + \mathbf{D}_T\nabla T).$$

Это соотношение следует понимать как три независимых векторных равенства, которые соответствуют пространственным компонентам потоков, скорости и градиентов концентраций и температуры.

Рассмотрим плоскую термодиффузационную колонну высоты  $2H$  и ширины  $2L$  с разностью температур  $2\Delta T$  между стенками, рис. 5.1 (б). Предполагается, что вертикальный градиент температуры отсутствует. Отношение высоты колонны к ее ширине достаточно большое ( $H/L \sim 100$ ), поэтому конвективное течение имеет строго вертикальное направление за исключением небольших областей в верхней и нижней части колонны. Из уравнения неразрывности и равенства нулю горизонтальной скорости следует, что вертикальная скорость зависит только от горизонтальной координаты  $x$ . Предполагается, что вертикальные градиенты концентрации компонентов в стационарном состоянии являются постоянными. Таким образом, стационарное решение, описывающее конвекцию и разделение смеси в колонне, ищется в виде

$$\mathbf{u} = (0, w(x)), \quad T = T_0 + T(x), \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}(x) + \mathbf{A}z, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_{n-1})^T$  — постоянный вектор.

Заметим, что решение (5.1) принадлежит к классу инвариантных решений ранга 1 двумерных уравнений (2.32) относительно подгруппы, порождаемой операторами (см. (3.28), (3.29))

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad H_3(1) + \sum_{i=1}^{n-1} A_i U_i = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{n-1} \left( A_i \beta_i \rho_0 g z \frac{\partial}{\partial p} + A_i \frac{\partial}{\partial C_i} \right).$$

Общий вид решения, инвариантного относительно данной подгруппы, дается формулами

$$\mathbf{u} = (u(x), w(x)), \quad p = p(x) + \sum_{i=1}^{n-1} A_i \beta_i \rho_0 g \frac{z^2}{2}, \quad (5.2)$$

$$T = T(x), \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}(x) + \mathbf{A}z.$$

Из уравнения неразрывности следует  $u = \text{const}$ . Решение (5.1) соответствует случаю  $u = 0$ . Представление для давления вида (5.2) получается после подстановки (5.1) в уравнения движения и интегрирования с учетом граничных условий (см. ниже).

Перейдем к постановке граничных условий. На боковых стенках колонны задается температура и ставятся условия прилипания и отсутствия диффузационного потока массы компонентов:

$$x = \pm L : \quad w = 0, \quad T = T_0 \pm \Delta T, \quad D \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} + \mathbf{D}_T \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (5.3)$$

Так как колонна является замкнутой сверху и снизу, расход смеси через поперечное сечение  $z = \text{const}$  должен быть равен нулю

$$\int_{-L}^L w dx = 0. \quad (5.4)$$

В стационарном состоянии полный поток массы компонентов смеси через поперечное сечение колонны равен нулю:

$$\mathbf{J}'_z = \int_{-L}^L \rho_0 \left( \mathbf{C}w - D \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial z} \right) dx = 0, \quad (5.5)$$

где  $\mathbf{J}'_z$  есть проекция потока на ось  $z$ . Предполагается, что вертикальная конвекция в колонне достаточно интенсивная. В этом случае диффузационный перенос массы в вертикальном направлении пренебрежимо мал по сравнению с конвективным переносом [114] и указанное выше соотношение сводится к

$$\int_{-L}^L \mathbf{C} w dx = 0. \quad (5.6)$$

Влияние вертикальной диффузии на разделение смеси в колонне будет рассмотрено отдельно в пункте 5.1.5. Условие сохранения массы компонентов смеси записывается в виде

$$\frac{1}{4HL} \int_{-H}^H \int_{-L}^L \mathbf{C} dx dz = \mathbf{C}_0. \quad (5.7)$$

Прежде чем решить сформулированную задачу в полной постановке, рассмотрим случай, когда в уравнении импульса можно пренебречь изменениями плотности, связанными с неоднородностью концентрации ( $\beta_i = 0$ ). Это предположение справедливо, если (суммарное) отношение разделения не слишком большое (для бинарных смесей авторы работы [119] приводят оценку

$0 < \psi < 2$ ). В этом случае стационарное решение задачи легко находится и может быть записано в виде

$$w = \frac{g\beta_T \Delta T L^2}{6\nu} \left( \frac{x}{L} - \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right), \quad T = T_0 + \frac{\Delta T}{L} x, \quad p = p_0, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\Delta T}{80} \left[ 21 \left( \frac{x}{L} \right)^5 - 70 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 25 \frac{x}{L} \right] D^{-1} \mathbf{D}_T - \frac{63\nu D_T}{2g\beta_T L^4} z + \mathbf{C}_0,$$

где постоянная  $p_0$  есть характерное давление (разность полного давления и гидростатической составляющей). В данном решении вертикальные градиенты концентраций даются формулами (заметим, что  $L$  есть половина ширины слоя) [133]

$$\frac{\partial C_i}{\partial z} = -\frac{63\nu D_{Ti}}{2g\beta_T L^4}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (5.9)$$

Экспериментальное измерение градиентов концентраций позволяет определить коэффициенты термодиффузии  $D_{Ti}$  из соотношений (5.9) при условии, что вязкость и коэффициент теплового расширения смеси известны.

Перейдем теперь к полной постановке задачи с учетом изменений плотности, вызванных неоднородностями концентрации ( $\beta_i \neq 0$ ). Введем безразмерные переменные согласно следующим формулам:

$$t = \frac{L^2}{\nu} t^*, \quad \mathbf{x} = L \mathbf{x}^*, \quad \mathbf{u} = \frac{\nu}{L} \mathbf{u}^*, \quad (5.10)$$

$$p = \rho_0 \frac{\nu^2}{L^2} p^*, \quad T - T_0 = \Delta T T^*, \quad \mathbf{C} - \mathbf{C}_0 = \beta_T \Delta T B^{-1} \mathbf{C}^*.$$

Отбрасывая для простоты верхние индексы у безразмерных переменных, запишем уравнения движения (2.32) в безразмерной форме

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \text{Gr}(T + \mathbf{I} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{e}_2, \\ \partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \text{Pr}^{-1} \nabla^2 T, \\ \partial_t \mathbf{C} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{C} &= \mathcal{SC}(\nabla^2 \mathbf{C} - \boldsymbol{\psi} \nabla^2 T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  (рассматриваются двумерные уравнения движения). Система содержит следующие безразмерные параметры: число Грасгофа  $\text{Gr} =$

$\beta_T g \Delta T L^3 / \nu^2$ , число Прандтля  $\text{Pr} = \nu/\chi$ , вектор отношений разделения  $\psi = -\beta_T^{-1} B D^{-1} \mathbf{D}_T$  и матрицу  $(n-1) \times (n-1)$  безразмерных параметров

$$\mathcal{SC} = \nu^{-1} B D B^{-1}, \quad \{\mathcal{SC}\}_{ij} = \frac{\beta_i}{\beta_j} \text{Sc}_{ij}^{-1}, \quad i, j = 1, \dots, n-1,$$

где  $\text{Sc}_{ij} = \nu/D_{ij}$  — числа Шмидта.

Общий вид решения (5.1) записывается в безразмерных переменных следующим образом:

$$\mathbf{u} = (0, w(x)), \quad T = T(x), \quad \mathbf{C} = \mathbf{c}(x) + \text{Gr}^{-1} \mathcal{SC} \mathbf{R} z, \quad (5.12)$$

где  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_{n-1})^T$  — вектор безразмерных параметров, определяемых через размерные вертикальные градиенты концентрации компонентов  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{R} = \frac{gL^4}{\nu} B D^{-1} \mathbf{A}. \quad (5.13)$$

Параметры  $R_i, i = 1, \dots, n-1$  будем называть *концентрационными числами Рэлея*. Для бинарной смеси вектор  $\mathbf{R}$  сводится к скалярному параметру

$$\mathcal{R}_c = \frac{g \beta_C \mathcal{A} L^4}{\nu \mathcal{D}},$$

где  $\mathcal{A} = \partial C / \partial z$ . Этот параметр характеризует разделение бинарной смеси в вертикальном направлении колонны [118, 121].

Границные условия (5.3) в безразмерных переменных принимают вид

$$x = \pm 1 : \quad w = 0, \quad T = \pm 1, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} - \psi \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (5.14)$$

в то время как соотношения (5.4), (5.6), (5.7) переписываются следующим образом:

$$\int_{-1}^1 w dx = 0, \quad \int_{-1}^1 \mathbf{C} w dx = 0, \quad \int_{-1}^1 \mathbf{C} dx = 0. \quad (5.15)$$

Если учитывается диффузия в вертикальном направлении колонны, условие (5.6) заменяется условием (5.5). Последнее записывается в безразмерной форме как

$$\text{Gr} \int_{-1}^1 \mathbf{C} w dx - 2 \mathcal{SC}^2 \mathbf{R} = 0. \quad (5.16)$$

### 5.1.2 Построение решения

Подставим общий вид решения (5.1) в двумерные уравнения (5.11) и проинтегрируем их с учетом поставленных условий. Из первого уравнения импульса следует, что давление зависит только от координаты  $z$ . Разделение переменных во втором уравнении импульса дает

$$p = \mathbf{I} \cdot \mathcal{SC} \mathbf{R} \frac{z^2}{2} + p_1 z + p_0, \quad (5.17)$$

где  $p_1$  и  $p_0$  — постоянные, которые будут найдены ниже. Введем функцию тока

$$\Phi(x) = - \int_{-1}^x w(\tau) d\tau, \quad w = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (5.18)$$

и продифференцируем второе уравнение импульса по  $x$ . В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - \text{Gr} \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{I} \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} \right) &= 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\mathbf{R} \partial \Phi}{\text{Gr} \partial x} + \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial x^2} - \boldsymbol{\psi} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Из второго уравнения в (5.19) и граничного условия для температуры в (5.14) следует, что  $T = x$ . Интегрирование третьего уравнения в пределах от  $-1$  до  $x$  с учетом последнего условия в (5.14) дает

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} = - \frac{\mathbf{R}}{\text{Gr}} \Phi + \boldsymbol{\psi}. \quad (5.20)$$

Интегрируя это уравнение еще раз и возвращаясь к общему виду решения (5.12), найдем

$$\mathbf{C} = - \frac{\mathbf{R}}{\text{Gr}} \int_{-1}^x \Phi(\tau) d\tau + \boldsymbol{\psi} x + \text{Gr}^{-1} \mathcal{SC} \mathbf{R} z + \mathbf{c}^*, \quad (5.21)$$

где  $\mathbf{c}^*$  — постоянный вектор, который определяется из последнего условия в (5.15). Подстановка (5.20) в первое уравнение (5.19) приводит к

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + R \Phi = \text{Gr}(\Psi + 1),$$

где

$$\Psi = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\psi} = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i, \quad R = \mathbf{I} \cdot \mathcal{R} = \sum_{i=1}^{n-1} R_i. \quad (5.22)$$

Здесь  $\Psi$  — суммарное отношение разделения, определяемое формулой (2.26). Параметр  $R$  будем называть *суммарным концентрационным числом Рэлея*. Из (5.14), (5.15) и (5.18) следует, что функция тока и ее первая производная обращаются в ноль на границах  $x = \pm 1$ .

Рассмотрим теперь второе условие в (5.15). Интегрируя его по частям с использованием (5.20), получим

$$\text{Gr } \boldsymbol{\psi} \int_{-1}^1 \Phi(\tau) d\tau - \mathcal{R} \int_{-1}^1 \Phi^2(\tau) d\tau = 0. \quad (5.23)$$

Это условие связывает концентрационные числа Рэлея с соответствующими отношениями разделения компонентов смеси. Покомпонентное сложение равенств (5.23) дает соотношение между параметрами  $R$  и  $\Psi$ . В результате приходим к следующей задаче для функции тока

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + R \Phi = \text{Gr}(\Psi + 1), \quad (5.24)$$

$$\Phi(-1) = \Phi(1) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(-1) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(1) = 0, \quad (5.25)$$

$$\text{Gr } \Psi \int_{-1}^1 \Phi(\tau) d\tau - R \int_{-1}^1 \Phi^2(\tau) d\tau = 0. \quad (5.26)$$

Из (5.23) и (5.26) следует

$$\mathcal{R} = \frac{R}{\Psi} \boldsymbol{\psi}. \quad (5.27)$$

Заметим, что безразмерные параметры, аналогичные величинам  $\Psi$  и  $R$ , использовались при описании термодиффузионной колонны для бинарных смесей в работе [118].

Анализ полученной задачи начнем с простейшего случая  $\text{Gr} = 0$ . Тогда из условия (5.16) сразу следует  $\mathcal{R} = 0$ . Заметим, что в данном случае нельзя использовать условие (5.15), которое получается из (5.16) в предположении  $\text{Gr} \neq 0$ . С учетом  $R = 0$  из (5.24), (5.25) будем иметь  $\Phi = 0$ . В результате

получаем решение

$$w_s = 0, \quad T_s = x, \quad \mathbf{C}_s = \boldsymbol{\psi}x, \quad (5.28)$$

Решение (5.28) выписано в предположении, что величины  $\beta_T$  и  $\Delta T$ , с помощью которых вводятся безразмерные переменные (5.10), отличны от нуля. В этом случае равенство  $\text{Gr} = 0$  возможно лишь при  $g = 0$ , т.е. в состоянии невесомости. В этом случае конвекция отсутствует, а разделение смеси в горизонтальном направлении вызвано градиентом температуры.

В дальнейшем предполагается, что  $\text{Gr} > 0$ . Вычисления показывают, что решение задачи о конвекции в колонне существенно зависит от суммарного отношения разделения  $\Psi$ .

**Случай  $\Psi = 0$ .** Из (5.26) имеем  $R = 0$  или  $\Phi = 0$ . Последнее противоречит (5.24), поэтому единственной возможностью является равенство  $R = 0$ . В результате получаем следующее представление для функции тока:

$$\Phi = \frac{\text{Gr}}{24}(x^2 - 1)^2.$$

Поля скорости и концентрации определяются из (5.18) и (5.21) соответственно, а связь между отношениями разделения и концентрационными числами Рэлея следует из формулы (5.23):

$$\begin{aligned} w_s &= \frac{\text{Gr}}{6}(x - x^3), & T_s &= x, \\ \mathbf{C}_s &= -\frac{21x^5 - 70x^3 + 25x}{80} \boldsymbol{\psi} + \text{Gr}^{-1} \mathcal{SC} \mathcal{R} z, & \mathcal{R} &= \frac{63}{2} \boldsymbol{\psi}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

В данном решении выполняется равенство  $\Psi = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$ . Изменения плотности, вызванные изменениями концентрации компонентов смеси, компенсируются, в результате чего полный градиент плотности определяется только градиентом температуры (см. (2.27)). В этом случае размерные вертикальные градиенты концентраций даются формулами (5.9), которые получаются путем перехода к размерным переменным в соотношении между  $\mathcal{R}$  and  $\boldsymbol{\psi}$ . Формулы (5.29) соответствуют решению (5.8), записанному в безразмерном виде в предположении, что коэффициенты переноса связаны соотношением  $\Psi = -\beta_T^{-1} \mathbf{I} \cdot BD^{-1} \mathbf{D}_T = 0$ .

**Случай**  $\Psi = -1$ . Непосредственно проверяется, что задача (5.24), (5.25) имеет единственное решение  $\Phi = 0$  для  $R \geq 0$ . При  $R < 0$  ненулевые решения существуют только для специальных значений  $R$ , удовлетворяющих уравнению  $\cos 2\gamma \operatorname{ch} 2\gamma - 1 = 0$ , где  $\gamma = (-R)^{1/4}$ . В параграфе 5.2 будет показано, что при  $R < 0$  конвективное движение в колонне, как правило, является неустойчивым. В случае  $\Phi = 0$  имеем

$$w_s = 0, \quad T_s = x, \quad \mathbf{C}_s = \boldsymbol{\psi}x, \quad (5.30)$$

где  $\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\psi} = -1$ . В данном решении конвекция отсутствует, так как горизонтальные градиенты плотности, вызванные градиентами температуры и концентрации компонентов, компенсируют друг друга (см. (2.27)). В отсутствии конвекции из условия (5.16) имеем  $\mathcal{R} = 0$  и  $R = 0$ . Таким образом, вертикального разделения смеси в колонне не возникает.

**Случай**  $\Psi \neq 0, -1$ . Здесь вид решения зависит от знака  $R$ . Заметим, что решение задачи для функции тока при  $R = 0$  дает возможности  $\Psi = 0$  или  $\Psi = -1$ , которые были рассмотрены выше. Поэтому в дальнейшем предполагается, что  $R \neq 0$ .

**1.** Пусть  $R < 0$ . Тогда решение имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{\operatorname{Gr}(\Psi + 1)}{\gamma^4} \left( \frac{\sin \gamma \operatorname{ch} \gamma x + \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma x}{\sin \gamma \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma} - 1 \right), \quad \gamma = (-R)^{1/4}.$$

Вычисление интегралов в (5.26) дает

$$\int_{-1}^1 \Phi(\tau) d\tau = -\frac{2\operatorname{Gr}(\Psi + 1)}{\gamma^4} F(\gamma), \quad \int_{-1}^1 \Phi^2(\tau) d\tau = \frac{2\operatorname{Gr}^2(\Psi + 1)^2}{\gamma^8} G(\gamma), \quad (5.31)$$

где

$$F(\gamma) = 1 - \frac{2 \sin \gamma \operatorname{sinh} \gamma}{\gamma (\sin \gamma \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma)}, \quad (5.32)$$

$$G(\gamma) = 1 - \frac{5 \sin \gamma \operatorname{sinh} \gamma}{2\gamma (\sin \gamma \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma)} + \frac{\sin^2 \gamma + \operatorname{sh}^2 \gamma}{2(\sin \gamma \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma)^2}.$$

Подставляя эти выражения в (5.26) и разрешая полученное соотношение от-

носительно  $\Psi$  с учетом  $\Psi \neq -1$ , находим

$$\Psi = \frac{G(\gamma)}{F(\gamma) - G(\gamma)}, \quad \gamma = (-R)^{1/4}. \quad (5.33)$$

Данное соотношение описывает связь между суммарным концентрационным числом Рэлея  $R$  и суммарным отношением разделения  $\Psi$ . Эта зависимость вместе с формулами (5.27) связывает концентрационные числа Рэлея с отношениями разделения компонентов, и, следовательно, вертикальные градиенты концентраций с коэффициентами термодиффузии. Последняя связь является ключевой в теории замкнутой термодиффузионной колонны.

Подставляя выражение для  $\Psi$  из (5.33) в (5.31), получим

$$\int_{-1}^1 \Phi(\tau) d\tau = \frac{2\text{Gr} F^2(\gamma)}{\gamma^4(G(\gamma) - F(\gamma))}, \quad \int_{-1}^1 \Phi^2(\tau) d\tau = \frac{2\text{Gr}^2 F^2(\gamma) G(\gamma)}{\gamma^8(G(\gamma) - F(\gamma))^2}. \quad (5.34)$$

Эти формулы будут использоваться в дальнейшем. Поля скорости и концентрации определяются из (5.18) и (5.21) соответственно с учетом соотношений (5.27):

$$w_s = \frac{\text{Gr} (\Psi + 1)}{\gamma^3} \frac{\sinh \gamma \sin \gamma x - \sin \gamma \sinh \gamma x}{\sin \gamma \cosh \gamma + \sinh \gamma \cos \gamma}, \quad T_s = x, \quad (5.35)$$

$$\mathbf{C}_s = \left[ (1 + \Psi^{-1}) \left( \frac{\sin \gamma \sinh \gamma x + \sinh \gamma \sin \gamma x}{\gamma(\sin \gamma \cosh \gamma + \sinh \gamma \cos \gamma)} - x \right) + x \right] \boldsymbol{\psi} + \frac{R}{\Psi \text{Gr}} \mathcal{SC} \boldsymbol{\psi} z.$$

**2.** Пусть  $R > 0$ . В этом случае решение дается формулой

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & \frac{\text{Gr} (\Psi + 1)}{4\eta^4} \left( \frac{2(\sinh \eta \cos \eta - \sin \eta \cosh \eta) \sin \eta x \sinh \eta x}{\sin 2\eta + \sinh 2\eta} - \right. \\ & \left. - \frac{2(\sin \eta \cosh \eta + \sinh \eta \cos \eta) \cos \eta x \cosh \eta x}{\sin 2\eta + \sinh 2\eta} + 1 \right), \end{aligned}$$

где  $\eta = (R/4)^{1/4}$ . Действуя аналогичным образом, найдем соотношение между  $\Psi$  и  $R$ :

$$\Psi = \frac{G(\eta)}{F(\eta) - G(\eta)}, \quad \eta = (R/4)^{1/4}, \quad (5.36)$$

где

$$F(\eta) = 1 + \frac{1}{\eta} \frac{\cos 2\eta - \cosh 2\eta}{\sin 2\eta + \sinh 2\eta}, \quad (5.37)$$

$$G(\eta) = 1 + \frac{5}{4\eta} \frac{\cos 2\eta - \operatorname{ch} 2\eta}{\sin 2\eta + \operatorname{sh} 2\eta} + \frac{\sin 2\eta \operatorname{sh} 2\eta}{(\sin 2\eta + \operatorname{sh} 2\eta)^2}.$$

Интегралы от функции тока имеют вид

$$\int_{-1}^1 \Phi(\tau) d\tau = \frac{\operatorname{Gr} F^2(\eta)}{2\eta^4(F(\eta) - G(\eta))}, \quad \int_{-1}^1 \Phi^2(\tau) d\tau = \frac{\operatorname{Gr}^2 F^2(\eta) G(\eta)}{8\eta^8(F(\eta) - G(\eta))^2}. \quad (5.38)$$

Поля скорости, температуры и концентрации даются формулами

$$w_s = \frac{\operatorname{Gr} (\Psi + 1)}{\eta^3} \frac{\sin \eta \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta x \cos \eta x - \operatorname{sh} \eta \cos \eta \operatorname{sin} \eta x \operatorname{ch} \eta x}{\sin 2\eta + \operatorname{sh} 2\eta},$$

$$\mathbf{C}_s = \left[ (1 + \Psi^{-1}) \left( \frac{2 \sin \eta \operatorname{ch} \eta \operatorname{sin} \eta x \operatorname{ch} \eta x + 2 \operatorname{sh} \eta \cos \eta \operatorname{sh} \eta x \cos \eta x}{\eta(\sin 2\eta + \operatorname{sh} 2\eta)} - x \right) + x \right] \boldsymbol{\psi} + \frac{R}{\Psi \operatorname{Gr}} \mathcal{SC} \boldsymbol{\psi} z, \quad T_s = x. \quad (5.39)$$

Для всех представленных решений давление описывается формулой (5.17) с  $p_1 = 0$ . Решения (5.35) и (5.39) переходят в решение (5.29) при  $R \rightarrow 0$ .

### 5.1.3 Анализ решения

Исследуем зависимость суммарного отношения разделения  $\Psi$  от суммарного концентрационного числа Рэлея  $R$ . Для удобства введем следующие функции

$$F(R) \equiv \begin{cases} F(\eta), & R > 0 \\ 0, & R = 0 \\ F(\gamma), & R < 0, \end{cases} \quad G(R) \equiv \begin{cases} G(\eta), & R > 0 \\ 0, & R = 0 \\ G(\gamma), & R < 0, \end{cases} \quad (5.40)$$

где  $\gamma = (-R)^{1/4}$ ,  $\eta = (R/4)^{1/4}$ , а функции  $F(\gamma)$ ,  $G(\gamma)$  и  $F(\eta)$ ,  $G(\eta)$  заданы формулами (5.32) и (5.37) соответственно. Выбор значений функций  $F(R)$  и  $G(R)$  при  $R = 0$  объясняется тем, что функции, зависящие от аргументов  $\gamma$ ,  $\eta$  стремятся к нулю при  $\gamma$ ,  $\eta \rightarrow 0$ . Следует подчеркнуть, что функции  $F$  и  $G$  с различными аргументами  $(R, \eta, \gamma)$  соответствуют различным зависимостям. С учетом (5.40) формулы (5.33) и (5.36) можно переписать в виде одной формулы

$$\Psi(R) = \frac{G(R)}{F(R) - G(R)}. \quad (5.41)$$

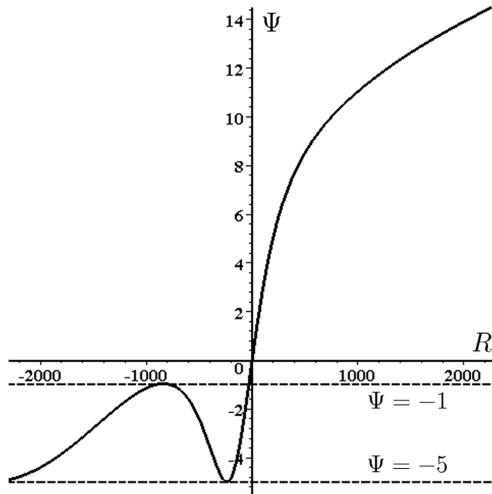


Рис. 5.2. Зависимость суммарного отношения разделения  $\Psi$  от суммарного концентрационного числа Рэлея  $R$ .

Отсюда следует  $\Psi(R) \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow 0$ , поэтому можно положить  $\Psi(0) \equiv 0$ , что согласуется с полученными выше результатами для случая  $\Psi = 0$ . Зависимость  $\Psi(R)$  представлена на рис. 5.2. Заметим, что значению  $R = 0$  также соответствует значение  $\Psi = -1$  (этую точку следует рассматривать отдельно).

**Теорема 5.1.** Функция  $\Psi(R)$  имеет следующие свойства:

1. Это непрерывная функция, определенная для любого вещественного  $R$ .
2.  $\Psi(R) > 0$  при  $R > 0$ ,  $\Psi(R) < 0$  при  $R < 0$  и  $\Psi(0) = 0$ .
3. Асимптотическое поведение функции описывается формулами

$$\begin{aligned} \Psi &\sim 2R/63 \quad \text{при } R \rightarrow 0, \\ \Psi &\sim 2\sqrt{2}R^{1/4} - 5 \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \\ \Psi &\sim -3 - 2\sin(2(-R)^{1/4}) \quad \text{при } R \rightarrow -\infty. \end{aligned} \tag{5.42}$$

**Доказательство.** Рассмотрим два случая, соответствующих положительным и отрицательным значениям  $R$ .

1. Пусть  $R < 0$ . В данном случае зависимость  $\Psi(R)$ , определенная по формулам (5.40), сводится к (5.33), где параметр  $\gamma = (-R)^{1/4}$  является положительным. Из второго равенства в (5.34) следует  $G(\gamma) > 0$  при  $\gamma \neq 0$ . Тогда знак функции  $\Psi(R)$  совпадает со знаком выражения  $F(\gamma) - G(\gamma)$ . Используя формулы (5.32), легко показать, что знак данного выражения определяется

знаком функции

$$f(\gamma) = \sin^2 \gamma (\operatorname{sh} 2\gamma - 2\gamma) + \operatorname{sh}^2 \gamma (\sin 2\gamma - 2\gamma)$$

при условии  $\gamma > 0$ .

**Лемма 1.** Функция  $f(\gamma) < 0$  при  $\gamma > 0$ .

**Доказательство.** Очевидно, что функция  $f$  непрерывна и  $f(0) = 0$ . Для доказательства леммы достаточно показать, что производная  $f'(\gamma) < 0$  для положительных значений  $\gamma$ . При  $\gamma > 1$  значение производной может быть оценено следующим образом:

$$\begin{aligned} f'(\gamma) &= 2 \operatorname{sh} 2\gamma (\sin 2\gamma - \gamma) - 2\gamma \sin 2\gamma \leq 2 \operatorname{sh} 2\gamma (1 - \gamma) + 2\gamma < \\ &< 4\gamma(1 - \gamma) + 2\gamma = 2\gamma(3 - 2\gamma), \end{aligned} \quad (5.43)$$

где было использовано неравенство  $\operatorname{sh} 2\gamma > 2\gamma$ . Из (5.43) следует  $f'(\gamma) < 0$  при  $\gamma > 3/2$ . Для доказательства отрицательности производной при  $\gamma \leq 3/2$ , разложим ее в ряд Тейлора вблизи точки  $\gamma = 0$ :

$$f'(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n+2}((-1)^n 4^n - 2n - 1)}{(4n+2)!} \gamma^{4n+2}.$$

Можно показать, что этот ряд абсолютно сходится при  $|\gamma| < \infty$ . Выделяя члены, соответствующие  $n = 2k$  и  $n = 2k - 1$  ( $k \geq 1$ ), найдем

$$\begin{aligned} f'(\gamma) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{4k+2}(4^{2k} - 4k - 1)}{(8k+2)!} \gamma^{8k+2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{4k}(4^{2k-1} + 4k - 1)}{(8k-2)!} \gamma^{8k-2} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{4k}}{(8k+2)!} \gamma^{8k-2} \left[ 16\gamma^4(4^{2k} - 4k - 1) - \right. \\ &\quad \left. -(4^{2k-1} + 4k - 1)(8k-1)8k(8k+1)(8k+2) \right]. \end{aligned}$$

В предположении  $0 < \gamma < 2$  последнее разложение может быть оценено сверху следующим образом:

$$f'(\gamma) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{4k}}{(8k+2)!} \gamma^{8k-2} \left[ 4^{2k+4} - 4^{2k-1}4k(8k)^3 \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{6k+4}(1 - 2k^4)}{(8k+2)!} \gamma^{8k-2} < 0.$$

Заметим, что этот ряд также абсолютно сходится при  $|\gamma| < \infty$ . ■

На основе приведенных выше рассуждений и Леммы 1 заключаем, что  $\Psi(R) < 0$  при  $R < 0$ . Непрерывность этой функции следует из представления

$$\Psi(R) = \frac{\gamma(3\operatorname{ch} 2\gamma - 3\cos 2\gamma + 2\sin 2\gamma \operatorname{sh} 2\gamma) - 5(\sin^2 \gamma \operatorname{sh} 2\gamma + \operatorname{sh}^2 \gamma \sin 2\gamma)}{\sin^2 \gamma (\operatorname{sh} 2\gamma - 2\gamma) + \operatorname{sh}^2 \gamma (\sin 2\gamma - 2\gamma)}, \quad (5.44)$$

где знаменатель дроби совпадает с функцией  $f(\gamma)$ .

**2.** Пусть  $R > 0$ . Здесь зависимость  $\Psi(R)$  сводится к (5.36) с положительным параметром  $\eta = (R/4)^{1/4}$ . Из второго равенства в (5.38) имеем  $G(\eta) > 0$  при  $\eta \neq 0$ , поэтому знак  $\Psi(R)$  совпадает со знаком выражения  $F(\eta) - G(\eta)$ . Используя (5.37), легко показать, что знак этого выражения определяется знаком функции

$$f(\eta) = \operatorname{sh} 4\eta - \sin 4\eta + 2\sin 2\eta \operatorname{ch} 2\eta - 2\cos 2\eta \operatorname{sh} 2\eta - 8\eta \sin 2\eta \operatorname{sh} 2\eta$$

при условии  $\eta > 0$ .

**Лемма 2.** Функция  $f(\eta) > 0$  при  $\eta > 0$ .

**Доказательство.** Данная функция непрерывна и  $f(0) = 0$ . Разложение производной  $f'(\eta)$  в ряд Тэйлора вблизи точки  $\eta = 0$  дает

$$\begin{aligned} f'(\eta) &= 4(\operatorname{ch} 4\eta - \cos 4\eta - 4\eta (\sin 2\eta \operatorname{ch} 2\eta + \cos 2\eta \operatorname{sh} 2\eta)) = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{3n+3}(4^n + (-1)^{n+1}(2n+1))}{(4n+2)!} \eta^{4n+2}. \end{aligned}$$

Этот ряд содержит только положительные члены и абсолютно сходится при  $|\eta| < \infty$ . Отсюда следует  $f'(\eta) > 0$ , что доказывает лемму. ■

Основываясь на Лемме 2, заключаем, что  $\Psi(R) > 0$  при  $R > 0$ . Непрерывность этой функции следует из представления

$$\begin{aligned} \Psi(R) &= \left( 8\eta (\sin^2 2\eta + \operatorname{sh}^2 2\eta + 3\sin 2\eta \operatorname{sh} 2\eta) + \right. \\ &\quad \left. + 5(\sin 4\eta - \operatorname{sh} 4\eta + 2\cos 2\eta \operatorname{sh} 2\eta - 2\sin 2\eta \operatorname{ch} 2\eta) \right) \times \\ &\quad \times \left( \operatorname{sh} 4\eta - \sin 4\eta + 2(\sin 2\eta \operatorname{ch} 2\eta - \cos 2\eta \operatorname{sh} 2\eta - 4\eta \sin 2\eta \operatorname{sh} 2\eta) \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

где знаменатель дроби совпадает с  $f(\eta)$ .

Таким образом, доказаны части 1 и 2 Теоремы 5.1. Что касается части 3, то поведение функции  $\Psi(R)$  при  $R \rightarrow \pm\infty$  определяется путем анализа главных членов в числителях и знаменателях формул (5.44) и (5.45). Эти члены равны  $e^{4\eta}$  и  $\gamma e^{2\gamma}$  соответственно. Разложение числителей и знаменателей в ряд вблизи  $\gamma = 0$  ( $\eta = 0$ ) позволяет определить поведение функции  $\Psi(R)$  при  $R \rightarrow 0$ . Теорема 5.1 полностью доказана. ■

Для описания конвективного течения и разделения смеси в колонне, необходимо задать число Грасгофа  $Gr$ , матрицу  $\mathcal{SC}$  и вектор отношений разделения  $\psi$ . Тогда суммарное отношение разделения  $\Psi$  дается формулой (5.22), а суммарное концентрационное число Рэлея  $R$  может быть определено численно из (5.41). Из Теоремы 5.1 и рис. 5.2 можно видеть, что заданному значению  $\Psi$  соответствует единственное значение  $R$  при  $\Psi > \Psi_0 \simeq -1$  и множество значений  $R$  при  $-5 < \Psi < \Psi_0$  (численный расчет дает значение  $\Psi_0 = -0.95716$ , которому соответствует  $R_0 = -29.94550$ ). При  $\Psi < -5$  решения для  $R$  не существует. Таким образом, в зависимости от значений суммарного отношения разделения  $\Psi$ , решение задачи может быть единственным, не единственным, а также может не существовать вообще. Физический смысл этого факта будет обсужден ниже. После определения  $R$  концентрационные числа Рэлея находятся по формулам (5.27). Из Теоремы 5.1 следует, что отношение  $R/\Psi$  всегда положительно, поэтому знаки параметров  $\psi_i$  и  $R_i$  для данного  $i$  совпадают. В случае, когда параметры  $R_i$  известны (например, из экспериментальных измерений вертикальных градиентов концентраций в колонне), обратная процедура позволяет определить  $\psi_i$ . Экспериментальные измерения будут обсуждаться более подробно в пункте 5.1.4.

Исследуем влияние эффекта термодиффузии на конвективное движение, вызванное горизонтальными неоднородностями плотности. Рассмотрим профиль плотности в поперечном сечении  $z = 0$  (в других поперечных сечениях профиль плотность отличается от указанного выше на постоянную величину). Используя (2.31), введем безразмерную плотность  $\rho^*$  по формуле

$$\rho^* = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0 \beta_T \Delta T} = -T - \mathbf{I} \cdot \mathbf{C}. \quad (5.46)$$

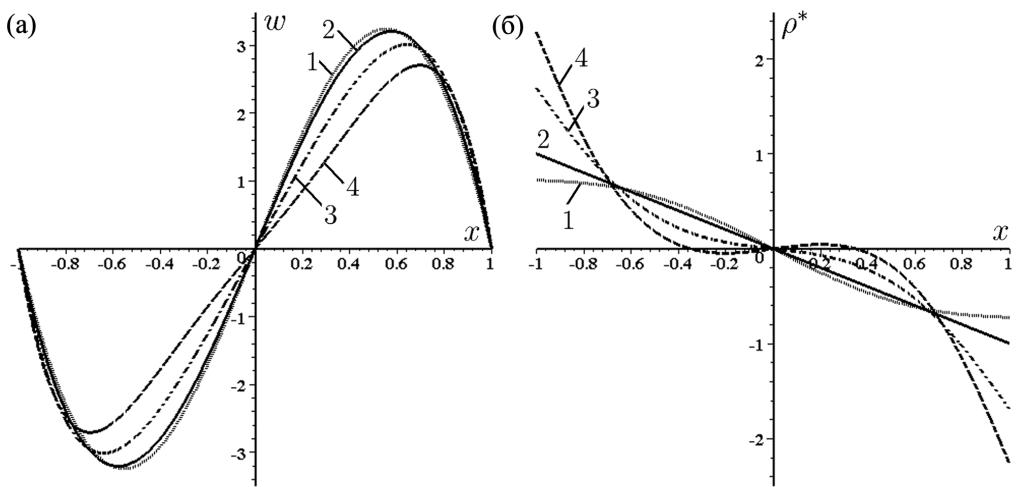


Рис. 5.3. Профили безразмерной скорости (а) и плотности (б) в поперечном сечении  $z = 0$ .

1 :  $\Psi = -0.9, R = -28.2$ ; 2 :  $\Psi = 0, R = 0$ ; 3 :  $\Psi = 2.5, R = 84.4$ ;  
4 :  $\Psi = 5, R = 195.6$ . Число Грасгофа  $Gr = 50$ .

В правой части этого равенства стоят безразмерные температура и вектор концентраций. Подставляя решения (5.29), (5.35), (5.39) в (5.46) и полагая  $z = 0$ , получим профиль плотности, зависящий от  $\Psi$  и  $R$ . Так как эти параметры связаны между собой, форма профилей скорости  $w$  и плотности  $\rho^*$  однозначно определяется значением суммарного отношения разделения  $\Psi$  (заметим, что амплитуда скорости зависит от числа Грасгофа). Соответствующие профили представлены на рис. 5.3. Знак  $\rho^*$  совпадает со знаком  $\rho - \rho_0$  при  $\beta_T > 0$ , что справедливо для большинства жидкостей.

В случае  $\Psi = 0$  изменения плотности, вызванные изменениями концентрации компонентов смеси, компенсируют друг друга. В результате получается линейный профиль плотности, вызванный тепловым расширением смеси (кривая 2). Для положительных  $\Psi$ , неоднородности плотности уменьшаются в центре колонны и увеличиваются вблизи стенок. Поэтому точки максимума модуля скорости смещаются в направлении боковых стенок (кривая 3). В данном случае термодиффузия перераспределяет компоненты таким образом, что плотность смеси уменьшается вблизи нагретой стенки и увеличивается вблизи холодной стенки. Если  $\psi_i > 0$  для  $i = 1, \dots, n - 1$  (нормальная термодиффузия), то легкие компоненты ( $\beta_i > 0$ ) концентрируются вблизи нагретой гра-

ницы, а тяжелые компоненты ( $\beta_i < 0$ ) — вблизи холодной границы. Заметим, что речь идет об удельном весе компонентов смеси относительно компонента  $n$ , выбранного в качестве растворителя. Конвективное течение в колонне приводит к возникновению вертикальных градиентов концентраций, которые формируют вертикальный градиент плотности. Этот градиент является потенциально устойчивым при  $\Psi > 0$ . Стабилизирующий эффект вертикального градиента плотности приводит к уменьшению скорости движения с ростом  $\Psi$ . Отметим, что эффект термодиффузионного разделения с увеличением  $\Psi$  усиливается (кривая 4). При отрицательных значениях  $\Psi$ , термодиффузионное разделение приводит к тому, что плотность вблизи нагретой стенки увеличивается, а вблизи холодной стенки — уменьшается (кривая 1). Если  $\psi_i < 0$  для  $i = 1, \dots, n - 1$  (аномальная термодиффузия), то легкие компоненты концентрируются вблизи холодной границы, а тяжелые компоненты — вблизи нагретой границы. В данном случае вертикальная стратификация по плотности является неустойчивой, так как более тяжелая жидкость оказывается в верхней части колонны. Гравитационная неустойчивость, вероятно, приводит к тому, что решение задачи при  $-5 < \Psi \lesssim -1$  не является единственным, а при  $\Psi < -5$  вообще отсутствует. Заметим, что неединственность стационарного решения для бинарной смеси при  $-5 < \psi \lesssim -1$  была описана в работе [121] (здесь  $\psi$  есть отношение разделения бинарной смеси). Полученные результаты также согласуются с результатами численного моделирования для бинарных смесей [119], где было показано, что вертикальный градиент концентрации разрушается при  $\psi \rightarrow -1$ . В случае  $\Psi = -1$  существует решение (5.30), в котором изменения плотности, вызванные изменениями температуры и концентрации компонентов, компенсируют друг друга, в результате чего конвекция отсутствует.

Заметим, что зависимость профиля скорости в колонне от значений параметра  $R$  исследовалась в работе [133]. Анализируя эволюцию данного профиля в области  $-2000 < R < 0$ , авторы пришли к выводу, что с уменьшением  $R$  конвективное движение может разделиться на несколько ячеек в горизонталь-

ном направлении. Как показано в настоящей работе, физическим параметром, характеризующим многокомпонентную смесь, является суммарное отношение разделения  $\Psi$ , а суммарное концентрационное число Рэлея  $R$  зависит от него. Так как стационарное решение (5.35) не является единственным в области  $-5 < \Psi \lesssim -1$  (что соответствует  $R \lesssim -30$ ), профиль скорости, соответствующий некоторому значению  $R$  из данного интервала, не может корректно описывать режим течения в колонне. В действительности существует бесконечное (счетное) число профилей скорости, определяемых значениями  $R$ , которые соответствуют заданному значению  $\Psi$ . Для выяснения структуры течения в колонне при указанных значениях параметров необходимо численное решение уравнений движения.

#### 5.1.4 Влияние зависимости плотности от концентрации

В классической теории термодиффузионной колонны [114] предполагается, что зависимостью плотности от концентрации в уравнении импульса можно пренебречь (см. решение (5.8)). Однако для смесей с большим (суммарным) отношением разделения, таких как коллоидные суспензии [294, 295] или смеси вблизи критической точки [296], классическая формула (5.9) дает существенно заниженные значения вертикальных градиентов концентрации (при заданных коэффициентах термодиффузии). Влияние данного эффекта обычно характеризуется отношением вертикальных градиентов концентрации, соответствующих решению полной задачи (с учетом зависимости плотности от концентрации) к значениям, определяемым по формуле (5.9) [118, 133]. Вертикальные градиенты концентрации в колонне измеряют экспериментально для определения коэффициентов термодиффузии  $D_{Ti}$ . В данном параграфе влияние зависимости плотности от концентрации на измеряемые значения коэффициентов термодиффузии будет описано в терминах суммарного отношения разделения и суммарного концентрационного числа Рэлея.

'Классические' значения коэффициентов  $D_{Ti}$  выражаются из (5.9):

$$D_{Ti}^o = -\frac{2g\beta_T L^4}{63\nu} \frac{\partial C_i}{\partial z}, \quad (5.47)$$

где верхний индекс 'о' введен для того, чтобы отличать их от 'неклассических' значений. Последние получаются путем перехода к размерным переменным в формулах (5.27) с учетом того, что  $A_i = \partial C_i / \partial z$ :

$$D_{Ti} = -\frac{g\beta_T L^4}{\nu R} \frac{\partial C_i}{\partial z}.$$

С помощью (5.41) отношение коэффициентов  $D_{Ti}$  и  $D_{Ti}^o$  можно записать следующим образом

$$\frac{D_{Ti}}{D_{Ti}^o} = \frac{63}{2R} \Psi = \frac{63}{2R} \frac{G(R)}{F(R) - G(R)}. \quad (5.48)$$

При  $R = 0$  имеем  $D_{Ti} = D_{Ti}^o$  (см. (5.42)). Приведенная формула определяет корректирующий множитель  $D_{Ti}/D_{Ti}^o$  как функцию параметра  $R$ , который зависит от известных или измеряемых в эксперименте величин, см. (5.13) и (5.22). Этот множитель также может быть представлен как функция от  $\Psi$ . Соответствующие зависимости показаны на рис. 5.4. Из этих графиков видно, что формула (5.47) дает завышенные значения коэффициентов термодиффузии при положительных  $R$  и  $\Psi$ . Однако, в области  $0 < \Psi < 2$  и  $0 < R < 66$  ошибка не превышает 5%. При  $-1 < \Psi < 0$  классическая формула дает слегка заниженные значения коэффициентов. Заметим, что при отрицательном  $\Psi$  градиент плотности является потенциально неустойчивым. Интервал  $\Psi < -1$  здесь не рассматривается в силу неоднозначной зависимости  $R$  от  $\Psi$ .

### 5.1.5 О диффузии в вертикальном направлении колонны

При построении решения предполагалось, что вертикальная конвекция в колонне достаточно интенсивная и диффузионный перенос массы в вертикальном направлении колонны пренебрежимо мал по сравнению с конвективным переносом (за исключением случая  $\Psi = -1$ , где конвекция отсутствует). Выясним, при каких условиях данное предположение справедливо. Из уравнения (5.16) можно видеть, что вертикальной диффузией можно пренебречь, если величина скорости, определяемая числом Грасгофа, достаточно большая, а диффузионные свойства смеси, определяемые матрицей  $\mathcal{SC}^2$ , достаточно слабы. Для получения количественной оценки, проинтегрируем уравнение (5.16)

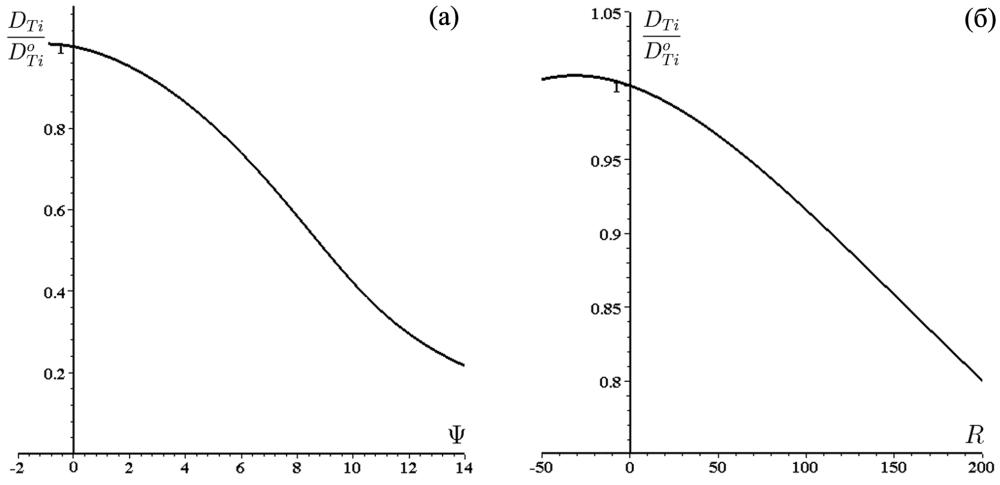


Рис. 5.4. Влияние зависимости плотности от концентрации в терминах корректирующего множителя  $D_{Ti}/D_{Ti}^o$ . Последний представлен как функция от  $\Psi$  (а) и от  $R$  (б). Интервал  $-31 < R < 196$  соответствует интервалу  $-1 < \Psi < 5$ .

по частям с учетом (5.18) и (5.20):

$$\text{Gr } \psi \int_{-1}^1 \Phi(\tau) d\tau - \mathcal{R} \int_{-1}^1 \Phi^2(\tau) d\tau - 2\mathcal{S}\mathcal{C}^2 \mathcal{R} = 0. \quad (5.49)$$

При учете вертикальной диффузии, задача для функции тока (5.24), (5.25) должна быть дополнена условием (5.49) вместо условия (5.26). Используя (5.31) и (5.34), а также учитывая определение (5.40), уравнение (5.49) можно преобразовать к виду

$$\mathcal{R} = \frac{R}{\Psi + 1} \frac{F(R)}{G(R)} \left[ E + \frac{R^2}{\text{Gr}^2(\Psi + 1)^2 G(R)} \mathcal{S}\mathcal{C}^2 \right]^{-1} \psi, \quad (5.50)$$

где  $E$  — единичная матрица. При  $R \rightarrow 0$  данное уравнение принимает вид

$$\mathcal{R} = \frac{63}{2(\Psi + 1)} \left[ E + \frac{2835}{2\text{Gr}^2(\Psi + 1)^2} \mathcal{S}\mathcal{C}^2 \right]^{-1} \psi.$$

Этот результат также может быть получен путем решения задачи для функции тока при  $R = 0$  и вычисления соответствующих интегралов в уравнении (5.49). Введем число  $\text{Sc}_M^{-2} = \max_{i,j} |\{\mathcal{S}\mathcal{C}^2\}_{ij}|$ , т.е.

$$\text{Sc}_M = \left( \max_{i,j} \left| \frac{1}{\nu^2} \frac{\beta_i}{\beta_j} \sum_{k=1}^{n-1} D_{ik} D_{kj} \right| \right)^{-1/2}. \quad (5.51)$$

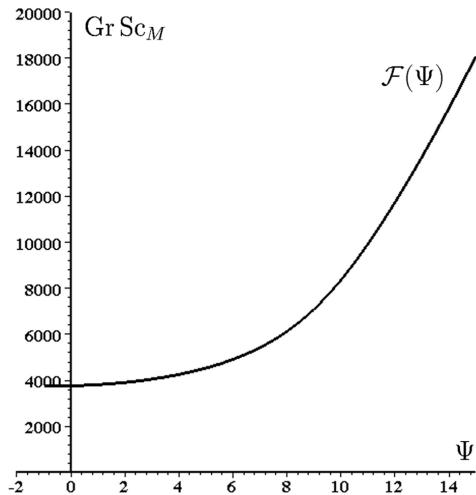


Рис. 5.5. Зависимость нижней границы для  $\text{Gr Sc}_M$  от суммарного отношения разделения  $\Psi$ . Диффузией в вертикальном направлении колонны можно пренебречь, если  $\text{Gr Sc}_M > \mathcal{F}(\Psi)$ .

Для бинарной смеси это число совпадает с числом Шмидта  $\text{Sc}$ . Будем считать, что эффектом вертикальной диффузии, который описывается членом с матрицей  $\mathcal{SC}^2$  в уравнении (5.50), можно пренебречь, если

$$\frac{R^2}{\text{Gr}^2 \text{Sc}_M^2 (\Psi + 1)^2 G(R)} \ll 1. \quad (5.52)$$

Пренебрегая указанным членом и выполняя покомпонентное суммирование уравнений (5.50), получим зависимость  $R$  от  $\Psi$  в виде (5.41). С учетом данной зависимости окончательный критерий малости эффекта вертикальной диффузии может быть записан в виде

$$\text{Gr Sc}_M > \mathcal{F}(\Psi) = \frac{N |R|}{|\Psi + 1| \sqrt{G(R)}}, \quad (5.53)$$

где множитель  $N$  показывает, во сколько раз левая часть (5.52) должна быть меньше единицы. Предполагается, что  $\Psi > -1$  (в противном случае, зависимость  $R$  от  $\Psi$  не является однозначной). Заметим, что из (5.34), (5.38), (5.40) следует  $G(R) \geq 0$ . Зависимость нижней границы для произведения  $\text{Gr Sc}_M$  от суммарного отношения разделения при  $N = 100$  показана на рис. 5.5. Функция  $\mathcal{F}(\Psi)$  возрастает с ростом  $\Psi$ . Это объясняется тем, что с увеличением  $\Psi$  скорость движения уменьшается (при фиксированном значении  $\text{Gr}$ ), а точки максимума скорости перемещаются ближе к боковым стенкам (рис. 5.3).

Поэтому для того, чтобы эффект вертикальной диффузии был пренебрежимо мал, необходимо увеличить амплитуду скорости (т.е. число Грасгофа) или уменьшить влияние диффузии (т.е. увеличить число  $Sc_M$ ). При  $\Psi = 0$  и  $R = 0$  неравенство (5.53) сводится к  $Gr Sc_M > 3765$ . Как видно из рис. 5.5, это простое неравенство можно использовать в области  $-1 < \Psi < 2$ . Данный результат соответствует оценкам, полученным ранее для бинарных смесей [119].

Для конкретной смеси с заданными значениями  $\Psi$  и  $Sc_M$ , критерий (5.53) дает нижнюю границу для числа Грасгофа. Верхняя граница определяется из условий устойчивости конвективного течения в колонне. Для жидких смесей с  $\nu \sim 10^{-6} \text{ м}^2/\text{s}$ ,  $D_{ij} \sim 10^{-9} \text{ м}^2/\text{s}$ ,  $\beta_i/\beta_j \sim 1$  число  $Sc_M \sim 10^3$  при условии, что число компонентов смеси  $n$  не слишком большое. Согласно (5.53), нижняя граница для числа Грасгофа изменяется в пределах  $3.76 < \mathcal{F}(\Psi) Sc_M^{-1} < 8.36$  при изменении  $\Psi$  на интервале  $0 < \Psi < 10$ . Как будет показано в параграфе 5.2, граница устойчивости конвективного течения лежит гораздо выше указанных значений (при условии, что  $\Psi$  не слишком большое). Заметим, что диффузационные свойства газовых смесей гораздо лучше, чем жидких, а число  $Sc_M$  для них существенно меньше. В таких смесях эффект вертикальной диффузии может оказывать существенное влияние на термодиффузионное разделение в колонне.

### 5.1.6 Пример тройной смеси

В качестве примера рассмотрим поведение тройной смеси углеводородов октан ( $C_8H_{18}$ ) — декан ( $C_{10}H_{22}$ ) — 1-метилнафталин ( $C_{11}H_{10}$ ) с одинаковыми средними концентрациями  $C_{i0} = 1/3$  в термодиффузионной колонне. В качестве растворителя выбран наиболее тяжелый компонент — 1-метилнафталин, в качестве компонента 1 — октан, в качестве компонента 2 — декан. Физические свойства этой смеси, представленные в Таблице 5.1, взяты из работы [134]. В указанной работе проводились измерения коэффициентов термодиффузии в термодиффузионной колонне высотой 530 мм и шириной 1.59 мм (см. описание данной колонны в [120]). Разность температур между стенками равнялась

Таблица 5.1. Физические свойства тройной смеси октан – декан – 1-метилнафталин [134].  
Компонент 1 — октан, компонент 2 — декан.

$C_{i0}$	$\rho_0$	$\nu$	$\beta_T$	$\beta_1$	$\beta_2$
$i = 1, 2, 3$	$\text{кг}/\text{м}^3$	$10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$	$10^{-4} \text{ 1}/\text{K}$		
1/3	795.668	1.1726	9.8170	0.3558	0.3168
$D_{11}$	$D_{12}$	$D_{21}$	$D_{22}$	$D_{T1}$	$D_{T2}$
		$10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$			$10^{-12} \text{ м}^2/\text{K с}$
1.99	-0.93	-0.42	2.40	-1.19	-0.98
$\partial C_1/\partial z$	$\partial C_2/\partial z$	$S_{T1}$	$S_{T2}$		
	$10^{-2} \text{ 1}/\text{м}$		$10^{-3} \text{ 1}/\text{K}$		
1.1417	0.9449	-0.859	-0.559		

Таблица 5.2. Концентрационные числа Рэлея, отношения разделения и числа Шмидта тройной смеси октан–декан–1-метилнафталин.

$R_1$	$R_2$	$R$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\Psi$
9.813	5.698	15.511	0.311	0.180	0.491
$Sc_{11}$	$Sc_{12}$	$Sc_{21}$	$Sc_{22}$	$\beta_1/\beta_2$	
589	-1261	-2792	489	1.123	

5 К. Экспериментальные значения вертикальных градиентов концентрации также приведены в Таблице 5.1.

На основе этих значений были вычислены концентрационные числа Рэлея  $R_1$ ,  $R_2$  и суммарное концентрационное число Рэлея  $R$  по формулам (5.13) и (5.22) соответственно (см. Таблицу 5.2). Подстановка значения  $R$  в (5.48) дает корректирующий множитель  $D_{Ti}/D_{Ti}^o = 0.992$ . Таким образом, для определения коэффициентов термодиффузии данной смеси может быть использована

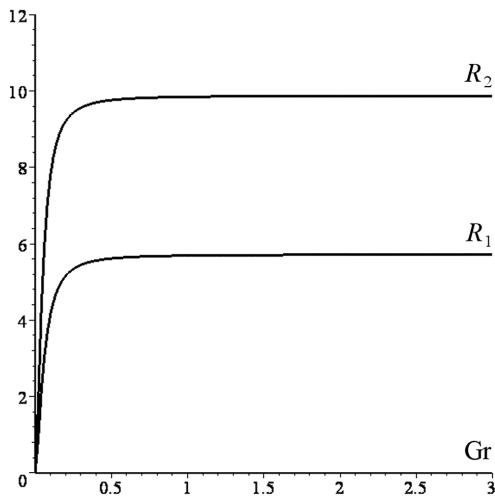


Рис. 5.6. Зависимость концентрационных чисел Рэлея от числа Грасгофа.

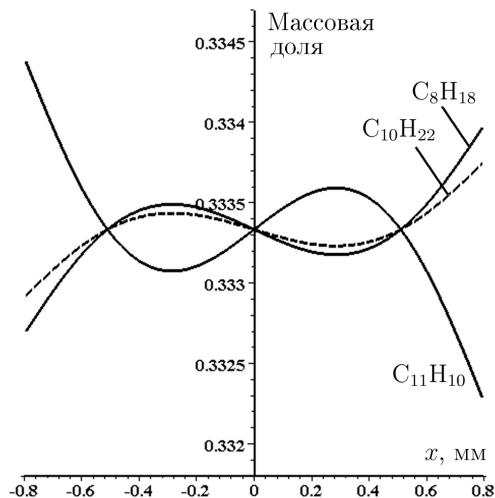


Рис. 5.7. Профили концентрации компонентов смеси в поперечном сечении колонны  $z = 0$  (используются размерные переменные).

классическая формула (5.47) (относительная погрешность в 0.8% находится в переделах погрешности экспериментальных измерений). Значения, представленные в Таблице 5.1, были вычислены по этой формуле. Коэффициенты Соре и отношения разделения определялись по формулам (2.21), (2.25), (2.26).

Для оценки влияния вертикальной диффузии построим зависимость концентрационных чисел Рэлея от числа Грасгофа на основе формулы (5.50). Эта зависимость приведена на рис. 5.6. Из графиков видно, что вертикальная диффузия существенна лишь при малых значениях  $Gr$ , т.е. когда конвекция достаточно слабая. С увеличением числа Грасгофа концентрационные числа

Рэлея приближаются к постоянным значениям, приведенным в Таблице 5.2, и перестают зависеть от  $Gr$ . Для получения количественной оценки определим число  $Sc_M = 472.8$  из (5.51). Критерий (5.53) дает  $Gr > 0.8$  при  $N = 10$  и  $Gr > 8$  при  $N = 100$ . При разности температур в 5 К имеем  $Gr = 8.8$ , поэтому диффузией в вертикальном направлении колонны можно пренебречь.

Распределение концентрации компонентов в поперечном сечении колонны  $z = 0$  показано на рис. 5.7 (используются размерные переменные). Значение  $x = 0$  соответствует центральной оси колонны. Как видно из рисунка, концентрация легких компонентов — октана ( $C_8H_{18}$ ) и декана ( $C_{10}H_{22}$ ) — в стационарном состоянии возрастает вблизи нагретой стенки (нормальная термодиффузия), и, соответственно, в верхней части колонны. Тяжелый компонент 1-метилнафталин концентрируется вблизи холодной стенки, и, соответственно, в нижней части колонны. Анализ профиля скорости позволяет определить максимальную абсолютную величину скорости конвективного движения, которая равна 0.82 мм/с.

## 5.2 Устойчивость конвективного движения в колонне

### 5.2.1 Линеаризованная задача

Перейдем к исследования устойчивости стационарного решения, описывающего конвекцию и разделение смеси в термодиффузионной колонне. Представим поля скорости, температуры и концентрации в виде суммы основного движения, описываемого формулами (5.29), (5.35), (5.39), и малых возмущений. Подставим это представление в безразмерные уравнения (5.11) и линеаризуем их относительно основного состояния. Заметим, что в данном случае преобразование Сквайра [297] не применимо, поэтому наиболее опасные возмущения могут быть трехмерными.

Будем рассматривать два типа нормальных возмущений (рис. 5.8): *продольные волны* (по отношению к вертикальному направлению колонны)  $\mathbf{u} = (-\partial\Phi/\partial z, 0, \partial\Phi/\partial x)$ ,  $T$ ,  $\mathbf{C}$  в плоскости  $xz$

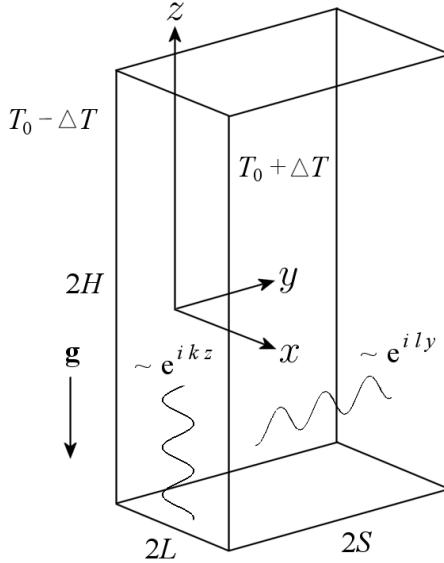


Рис. 5.8. Рассматриваемые типы возмущений в термодиффузионной колонне: продольные волны (в плоскости  $xz$ ) и поперечные волны (в плоскости  $yz$ ).

$$(\Phi, T, \mathbf{C}) = (\varphi(x), \theta(x), \boldsymbol{\xi}(x)) \exp(-\lambda t + ikz),$$

где  $\Phi(x, z)$  — функция тока для возмущений скорости, и *поперечные волны*  $\mathbf{u} = (0, v, w)$ ,  $T$ ,  $\mathbf{C}$  в плоскости  $yz$

$$(v, w, T, \mathbf{C}) = (v(x), w(x), \theta(x), \boldsymbol{\xi}(x)) \exp(-\mu t + ily). \quad (5.54)$$

В дальнейшем комплексные декременты будут записываться в виде  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_\omega$  и  $\mu = \mu_r + i\mu_\omega$ .

**Продольные волны.** Для исследования возмущений этого типа будем использовать двумерные уравнения (5.11) в терминах функции тока. Для удобства введем новые переменные по формуле  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\psi}\theta$ . Амплитуды возмущений удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\Delta^2 \varphi + ik(w_s'' \varphi - w_s \Delta \varphi) + \text{Gr}((\Psi + 1) \theta' + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\eta}') = -\lambda \Delta \varphi, \quad (5.55)$$

$$\text{Pr}^{-1} \Delta \theta + ik(T_s' \varphi - w_s \theta) = -\lambda \theta, \quad (5.56)$$

$$\mathcal{SC}(\Delta \boldsymbol{\eta} - \text{Gr}^{-1} \mathcal{R} \varphi') + ik(\mathbf{C}'_s \varphi - w_s(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\psi}\theta)) = -\lambda(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\psi}\theta), \quad (5.57)$$

где  $w_s$ ,  $T_s$ ,  $\mathbf{C}_s$  есть стационарное решение, описываемое формулами (5.29), (5.35), (5.39),  $\Delta = \partial_{xx} - k^2$ , а штрих соответствует производной  $\partial_x$ . Концентрационные числа Рэлея  $\mathcal{R}$  определяются путем численного решения нелинейной

системы уравнений (5.50). Границные условия следуют из (5.14):

$$x = \pm 1 : \quad \varphi = \varphi' = 0, \quad \theta = 0, \quad \boldsymbol{\eta}' = 0. \quad (5.58)$$

Для решения амплитудных уравнений будем использовать метод Галёркина.

Решение ищется в виде разложения по собственным функциям

$$\varphi = \sum_{j=0}^J a_j \varphi_j, \quad \theta = \sum_{m=0}^M b_m \theta_m, \quad \boldsymbol{\eta} = \sum_{q=0}^Q \sum_{i=1}^{n-1} c_{qi} \boldsymbol{\eta}_{qi}$$

следующих задач:

$$\Delta^2 \varphi_j = -\lambda_j \Delta \varphi_j, \quad x = \pm 1 : \quad \varphi_j = \varphi'_j = 0, \quad (5.59)$$

$$\Pr^{-1} \Delta \theta_m = -\mu_m \theta_m, \quad x = \pm 1 : \quad \theta_m = 0, \quad (5.60)$$

$$\mathcal{SC} \Delta \boldsymbol{\eta}_{qi} = -\nu_{qi} \boldsymbol{\eta}_{qi}, \quad x = \pm 1 : \quad \boldsymbol{\eta}'_{qi} = 0. \quad (5.61)$$

Задачи (5.59)–(5.61) выводятся из соответствующих уравнений (5.55)–(5.57) с граничными условиями (5.58). Выбор базисных функций основан на рассмотрении возмущений функции тока, температуры и концентрации в изотермическом слое ( $\text{Gr} = 0$ ) независимо друг от друга. Базис, используемый в настоящей работе, является обобщением базиса, описанного в [125], на случай многокомпонентной смеси.

Задача (5.59) имеет четные и нечетные решения. Четные функции даются формулами

$$\varphi_j = \frac{1}{\sqrt{I_j}} \left[ \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} k} - \frac{\cos \sqrt{\lambda_j - k^2} x}{\cos \sqrt{\lambda_j - k^2}} \right], \quad j = 0, 2, 4, \dots,$$

$$I_j = \frac{\lambda_j}{k^2 - \lambda_j} (k^2 + k \operatorname{tgh} k - k^2 \operatorname{tgh}^2 k - \lambda_j),$$

где собственные значения  $\lambda_j > 0$  являются корнями уравнения  $\sqrt{\lambda_j - k^2} \operatorname{tg} \sqrt{\lambda_j - k^2} + k \operatorname{tgh} k = 0$  (нумерация собственных значений осуществляется в порядке возрастания величины корней). Нечетные собственные функции имеют вид

$$\varphi_j = \frac{1}{\sqrt{I_j}} \left[ \frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} k} - \frac{\sin \sqrt{\lambda_j - k^2} x}{\sin \sqrt{\lambda_j - k^2}} \right], \quad j = 1, 3, 5, \dots,$$

$$I_j = \frac{\lambda_j}{k^2 - \lambda_j} (k^2 + k \operatorname{ctgh} k - k^2 \operatorname{ctgh}^2 k - \lambda_j),$$

где соответствующие собственные значения удовлетворяют уравнению  $\sqrt{\lambda_j - k^2} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda_j - k^2} + k \operatorname{ctgh} k = 0$ .

Задача (5.60) имеет следующие решения

$$\theta_m = \begin{cases} \cos(\pi/2(m+1)x), & m = 0, 2, 4, \dots \\ \sin(\pi/2(m+1)x), & m = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (5.62)$$

$$\mu_m = \operatorname{Pr}^{-1}(\pi^2/4(m+1)^2 + k^2).$$

Для смеси из  $n$  компонент система (5.61) имеет  $n-1$  серию собственных функций и собственных значений:

$$\boldsymbol{\eta}_{qi} = \boldsymbol{\eta}_i \begin{cases} \sqrt{2}/2, & q = 0, \\ \sin(\pi/2qx), & q = 1, 3, 5, \dots \\ \cos(\pi/2qx), & q = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (5.63)$$

$$\nu_{qi} = \nu_i(\pi^2q^2/4 + k^2),$$

где  $\nu_i$  и  $\boldsymbol{\eta}_i$  — собственные значения и соответствующие собственные вектора матрицы  $\mathcal{SC}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ .

В численных расчетах количество базисных функций выбиралось следующим образом:  $J = M = 15$ ,  $Q = 20$  для определения структуры нейтральных кривых на плоскости  $(k, \operatorname{Gr})$  и  $J = M = 25$ ,  $Q = 30$  для минимизации этих кривых по  $k$ . Таким образом, общее число базисных функций  $J + M + (n-1)Q$  было  $50-80$  для бинарных смесей и  $70-110$  для тройных смесей.

**Поперечные волны.** Подставляя представление (5.54) в трехмерные линеаризованные уравнения, найдем  $v = 0$ . Амплитудные уравнения и граничные условия принимают вид

$$\Delta w + \operatorname{Gr}(\theta + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi}) = -\mu w, \quad (5.64)$$

$$\operatorname{Pr}^{-1} \Delta \theta = -\mu \theta, \quad (5.65)$$

$$\mathcal{SC} (\Delta \boldsymbol{\xi} - \psi \Delta \theta - \operatorname{Gr}^{-1} \mathcal{R} w) = -\mu \boldsymbol{\xi}, \quad (5.66)$$

$$x = \pm 1 : \quad w = 0, \quad \theta = 0, \quad \boldsymbol{\xi}' - \psi \theta' = 0, \quad (5.67)$$

где  $\Delta = \partial_{xx} - l^2$ . Уравнение (5.65) вместе с граничным условием  $\theta = 0$  при

$x = \pm 1$  может быть решено отдельно от других уравнений. Соответствующие собственные значения и собственные функции даются формулами (5.62). Так как все собственные значения  $\mu_m$  положительны, поперечные температурные возмущения и соответствующие возмущения скорости и концентрации монотонно убывают. Последние получаются, если положить  $\mu = \mu_m$ ,  $\theta = \theta_m$  в уравнениях (5.64), (5.66) и проинтегрировать их с учетом граничных условий (5.67). Отсюда следует, что незатухающие поперечные возмущения существуют только при  $\theta = 0$ . В этом случае амплитудная задача сводится к

$$\Delta w + \text{Gr} \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi} = -\mu w, \quad (5.68)$$

$$\mathcal{SC} (\Delta \boldsymbol{\xi} - \text{Gr}^{-1} \mathcal{R} w) = -\mu \boldsymbol{\xi}, \quad (5.69)$$

$$x = \pm 1 : \quad w = 0, \quad \boldsymbol{\xi}' = 0. \quad (5.70)$$

Амплитудные уравнения интегрируются методом Галёркина. Решение ищется в виде разложения

$$w = \sum_{m=0}^M b_m w_m, \quad \boldsymbol{\xi} = \sum_{q=0}^Q \sum_{i=1}^{n-1} c_{qi} \boldsymbol{\xi}_{qi}, \quad (5.71)$$

где базисные функции даются формулами (5.62) и (5.63), в которых следует заменить  $\theta$  и  $\boldsymbol{\eta}$  на  $w$  и  $\boldsymbol{\xi}$  соответственно. Вычисления показывают, что количество базисных функций  $M = Q = 20$  достаточно для расчета нейтральных кривых.

### 5.2.2 Бинарные смеси

Рассмотрим в первую очередь вопрос об устойчивости бинарной смеси. Анализ данного случая необходим для правильного понимания и интерпретации результатов для смесей с тремя и большим числом компонент. Приведенные ниже характеристики устойчивости соответствуют более широкой области управляемых параметров по сравнению с имеющимися работами [125, 126, 130]. В дальнейшем нас будут интересовать жидкие смеси. Поэтому для числа Прандтля выбирается типичное для жидкостей значение  $\text{Pr} = 10$ .

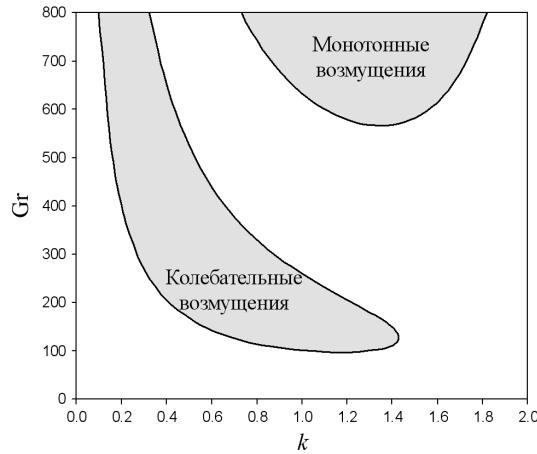


Рис. 5.9. Нейтральные кривые для продольных возмущений в бинарной смеси с  $\Psi = 0.5$ ,  $Sc = 500$ .

На рис. 5.9 представлена типичная структура нейтральных кривых для продольных возмущений в бинарной смеси с  $\Psi = 0.5$ ,  $Sc = 500$ . Имеются две моды неустойчивости — монотонная и колебательная, причем последняя в рассматриваемом случае является наиболее опасной. Расчеты показывают, что с уменьшением отношения разделения  $\Psi$  кривая колебательной неустойчивости смещается в область больших чисел Грасгофа, и монотонная мода становится наиболее опасной. Заметим, что нейтральные кривые для тройных смесей имеют аналогичную структуру.

Зависимость критических параметров (числа Грасгофа, волновых чисел  $k$ ,  $l$  и частоты колебаний) от отношения разделения  $\Psi$  показана на рис. 5.10. Предполагается, что  $\Psi > -1$ , так как решение, описывающее основное движение, не является единственным при  $\Psi < -1$  (см. пункт 5.1.3). Сплошные линии на графиках соответствуют продольным возмущениям. Как показывают расчеты, граница монотонной неустойчивости практически не зависит от чисел Прандтля и Шмидта (т.е. от тепловых и диффузационных свойств смеси). Анализ структуры критических возмущений показывает, что данный тип неустойчивости связан с образованием вихрей на границе двух встречных потоков, см. рис. 5.3 и 5.13 (последний рисунок соответствует случаю тройной смеси, где структура возмущений аналогична бинарному случаю). С ростом отношения разделения  $\Psi$  система становится более устойчивой по отношению

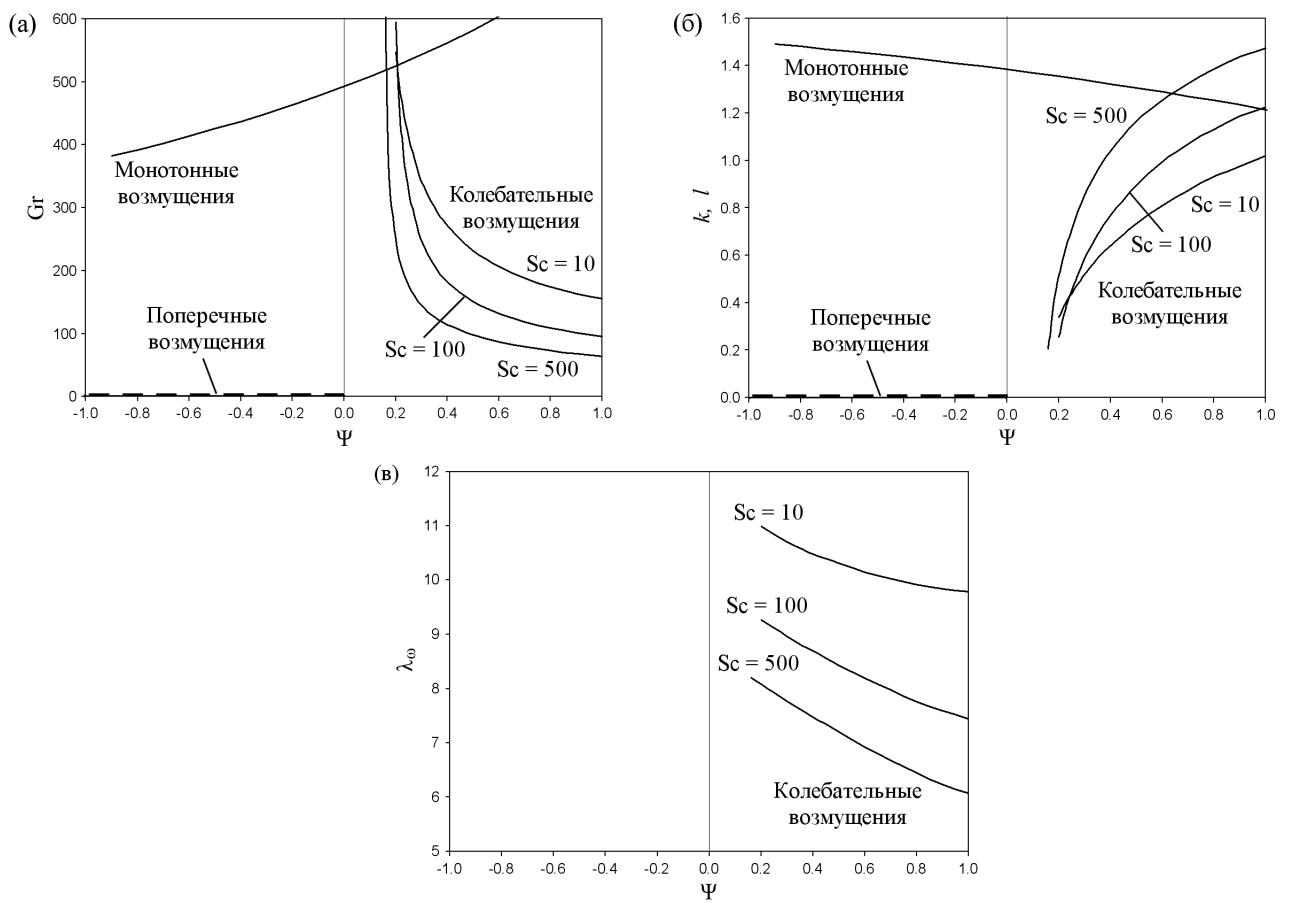


Рис. 5.10. Зависимость критических параметров неустойчивости от отношения разделения  $\Psi$  для бинарной смеси: число Грасгофа (а), волновое число (б) и частота колебаний (в).  
Сплошные линии — продольные возмущения, штриховые линии — поперечные возмущения.

к монотонным возмущениям. Для положительных  $\Psi$  легкий (тяжелый) компонент накапливается в верхней (нижней) части колонны, создавая тем самым потенциально устойчивую стратификацию в вертикальном направлении. С увеличением  $\Psi$  эта стратификация усиливается и стабилизирует монотонную моду. Для отрицательных  $\Psi$  вертикальная стратификация потенциально неустойчива, поэтому граница монотонной неустойчивости понижается с изменением  $\Psi$  в отрицательном направлении. Что касается колебательной моды, то с ростом  $\Psi$  она становится наиболее опасной и приводит к резкой дестабилизации течения. Эта мода существенно зависит от диффузионных свойств смеси: хорошие диффузионные свойства соответствуют малым числам Шмидта и приводят к быстрому затуханию возмущений концентрации, стабилизируя

течение. Однако для смесей с большим числом Шмидта диффузионные свойства достаточно слабы и течение является менее устойчивым. Как показывают расчеты, колебательная неустойчивость связана с ростом двух возмущений с противоположными фазовыми скоростями  $\lambda_\omega/k$ . Заметим, что для монотонной и колебательной мод большим значениям критического числа Грасгофа соответствуют меньшие значения критического волнового числа.

Прерывистые линии на рис. 5.10 соответствуют поперечным возмущениям. Оказывается, что для отрицательных отношений разделения течение неустойчиво при любом значении числа Грасгофа, при этом критическое волновое число  $l = 0$ . Длинноволновая монотонная неустойчивость связана с накоплением тяжелого компонента смеси в верхней части колонны (в этом случае вертикальный градиент плотности является гравитационно неустойчивым). Описанный механизм неустойчивости является естественным для отрицательных  $\Psi$ , однако не может быть обнаружен при рассмотрении двумерных возмущений в плоскости  $xz$ .

Заметим, что в настоящем исследовании используется приближение Обербека–Буссинеска. Предполагается, что плотность является линейной функцией температуры и концентрации. Влияние эффектов, выходящих за рамки данного приближения (например, зависимости отношения разделения от температуры и концентрации) на режимы стационарного течения в колонне с бинарной смесью исследовалось в работе [121]. Несмотря на более сложную зависимость поведения системы от значений управляемых параметров, было выделено две категории течений, соответствующих потенциально устойчивой и потенциально неустойчивой вертикальной стратификации. Поэтому можно ожидать, что описанные выше общие свойства устойчивости остаются справедливыми и для тех случаев, когда смесь описывается более сложными моделями по сравнению с приближением Обербека–Буссинеска.

### 5.2.3 Тройные смеси

Перейдем к исследованию устойчивости тройных смесей в термодиффу-

зионной колонне. Без ограничения общности можно сделать следующие предположения:

1. Наиболее тяжелый компонент смеси выбран в качестве растворителя, поэтому коэффициенты концентрационного расширения  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2$  положительны. Кроме этого, предполагается, что коэффициент теплового расширения  $\beta_T > 0$  (случай  $\beta_T < 0$  может быть изучен аналогичным образом). При этих предположениях, компонент  $i$  перемещается в более нагретую (более холодную) область под действием термодиффузии, если отношение разделения  $\psi_i$  положительно (отрицательно),  $i = 1, 2$ .

2. Безразмерная диффузионная матрица предполагается диагональной:  $\mathcal{SC} = \text{diag}\{\text{Sc}_1, \text{Sc}_2\}$  (в противном случае она может быть диагонализована преобразованием (3.36)). Далее, считается, что отношение  $s = \text{Sc}_1/\text{Sc}_2$  удовлетворяет неравенству  $0 < s \leq 1$  (в противном случае достаточно изменить нумерацию компонентов). Данный параметр также может быть записан в виде отношения диффузионных времен компонентов смеси:  $s = \tau_1/\tau_2$ , где  $\tau_i = L^2/D_{ii}$ .

В дальнейшем тройная смесь будет описываться параметрами  $\Psi$ ,  $\psi_1$ ,  $s$ ,  $\text{Sc}_2$ . Заметим, что если известна зависимость какой-либо из характеристик устойчивости (например, числа Грасгофа) от указанных параметров, влияние перекрестной диффузии на эту характеристику можно учесть с помощью преобразования (3.36). Для тройной смеси это преобразование сводится к замене (4.68).

Рассмотрим в первую очередь тройную смесь с одинаковыми диффузионными свойствами двух выбранных компонентов, т.е.  $s = 1$ . Как показывают расчеты, карта устойчивости для такой смеси совпадает с картой устойчивости бинарной смеси (рис. 5.10), где  $\Psi = \psi_1 + \psi_2$  теперь есть суммарное отношение разделения. Важным фактом является то, что границы устойчивости не зависят от конкретных значений  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Если отношение чисел Шмидта (или диффузионных времен)  $s \neq 1$ , характеристики устойчивости меняются. Однако, монотонная мода и в этом случае определяется только значением суммарно-

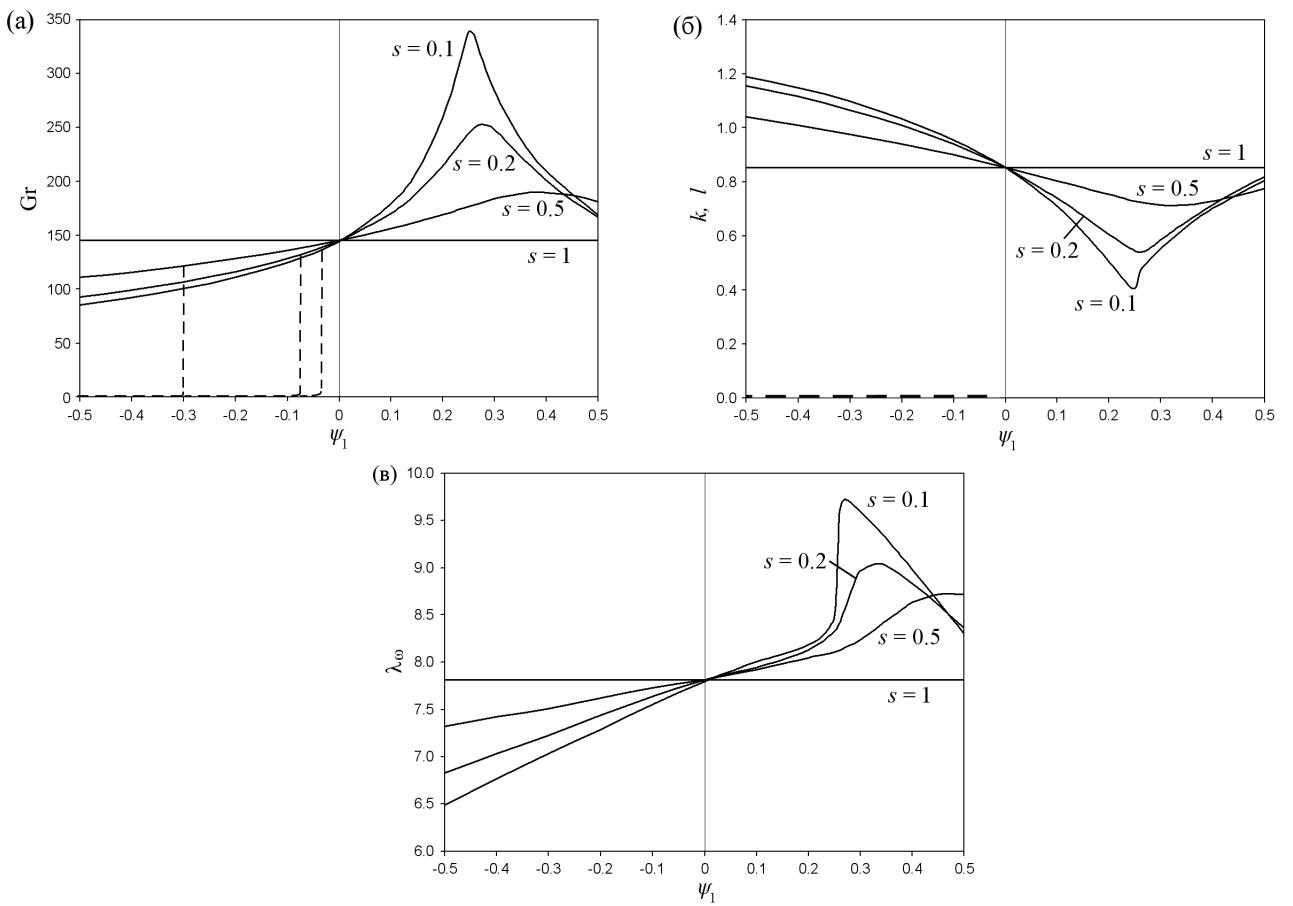


Рис. 5.11. Зависимость критических параметров неустойчивости от отношения разделения  $\psi_1$  и отношения чисел Шмидта  $s = Sc_1/Sc_2$  для тройной смеси: число Грасгофа (а), волновое число (б) и частота колебаний (в). Параметры смеси:  $\Psi = 0.3$ ,  $Sc_2 = 500$ .  
 Сплошные линии — продольные возмущения, штриховые линии — поперечные возмущения.

го отношения разделения. Типичная структура критических возмущений для монотонной неустойчивости показана на рис. 5.13. Как и в бинарной смеси, механизм монотонной неустойчивости связан с образованием вихрей на границе встречных стационарных потоков, см. рис. 5.3 (а). Возмущения температуры и концентрации сосредоточены в центральной части слоя. В примере на рис. 5.13 первый компонент имеет меньшее число Шмидта (т.е. меньшее диффузационное время), чем второй, поэтому соответствующее возмущение более размыто.

В отличие от монотонной моды, колебательная мода существенно зависит от термодиффузионных свойств отдельных компонентов смеси. На рис. 5.11 представлена зависимость критических параметров (числа Грасгофа, волно-

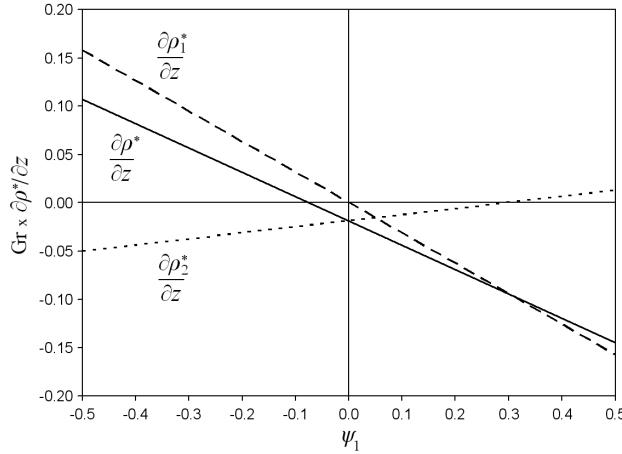


Рис. 5.12. Зависимость вертикальных градиентов плотности от отношения разделения  $\psi_1$  для тройной смеси с параметрами  $\Psi = 0.3$ ,  $s = 0.2$ ,  $Sc_2 = 500$ .

вого числа и частоты колебаний) от отношения разделения  $\psi_1$  при фиксированном значении  $\Psi = 0.3$  для различных отношений чисел Шмидта. Если отношение диффузационных времен  $s = 1$ , то критические параметры совпадают с аналогичными параметрами для бинарной смеси с  $\Psi = 0.3$  (см. рис. 5.10) и не зависят от  $\psi_1$ . С уменьшением  $s$  зависимость критических параметров от  $\psi_1$  становится существенной и карта устойчивости системы меняется. Для объяснения этого факта рассмотрим вертикальную стратификацию смеси по плотности, вызванную градиентами концентрации компонентов. Для нахождения этих градиентов заметим, что критические числа Грасгофа для колебательной неустойчивости достаточно велики, поэтому вертикальной диффузией можно пренебречь (см. пункт 5.1.5). Следовательно, концентрационные числа Рэлея определяются по формуле (5.27), в которой при  $-1 < \Psi < 2$  можно использовать приближенное соотношение  $R/\Psi \sim 63/2$ , см. (5.42). Тогда из (5.12) и (5.46) найдем

$$\frac{\partial \rho_1^*}{\partial z} = -\frac{\partial C_1}{\partial z} = -\frac{63}{2 \text{Gr} \text{Sc}_2} \frac{\psi_1}{s}, \quad \frac{\partial \rho_2^*}{\partial z} = -\frac{\partial C_2}{\partial z} = \frac{63}{2 \text{Gr} \text{Sc}_2} (\psi_1 - \Psi), \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial z} = -\frac{\partial C_1}{\partial z} - \frac{\partial C_2}{\partial z} = \frac{63}{2 \text{Gr} \text{Sc}_2} \left( \frac{\psi_1(s-1)}{s} - \Psi \right). \quad (5.73)$$

Вертикальные градиенты плотности показаны на рис. 5.12 для  $s = 0.2$ . Когда  $\psi_1$  увеличивается начиная со значения  $\psi_1 = 0$ , оба частичных градиента

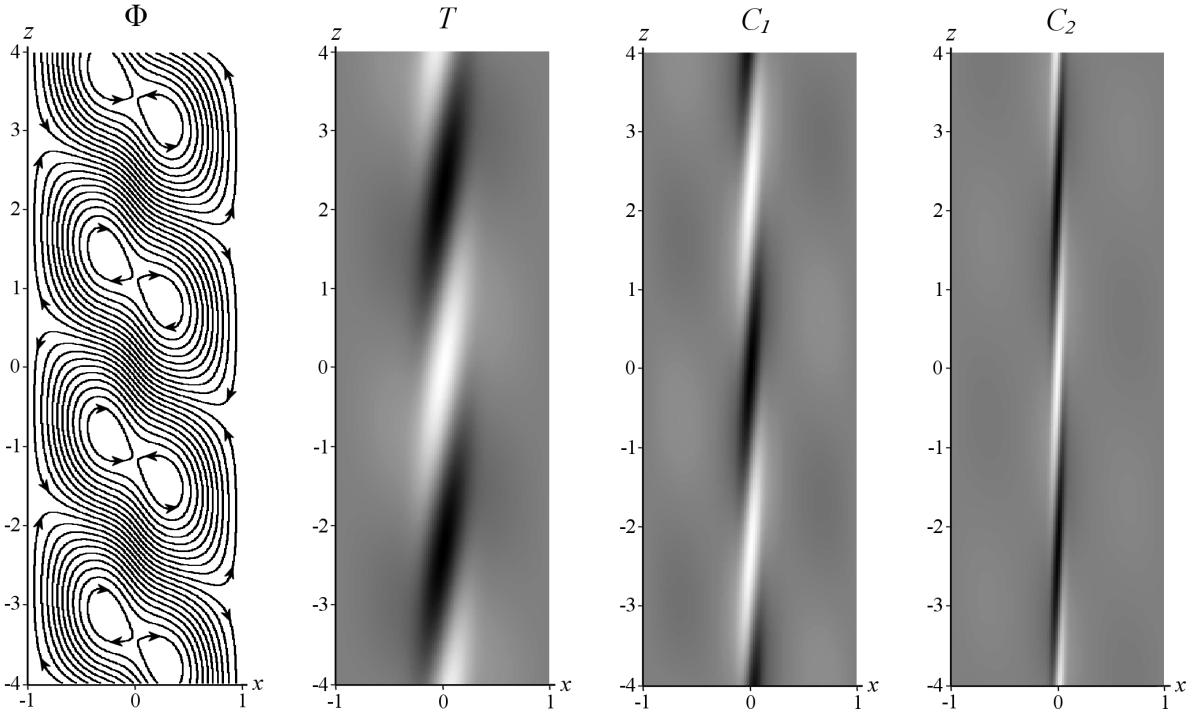


Рис. 5.13. Критические возмущения полей скорости, температуры и концентрации для монотонной неустойчивости в тройной смеси с параметрами  $\psi_1 = 0.2$ ,  $\psi_2 = -0.1$ , ( $\Psi = 0.1$ ),  $s = 0.2$ ,  $Sc_2 = 500$ . Критические параметры неустойчивости  $Gr = 508$ ,  $k = 1.37$ . Светлые и темные области отвечают положительным и отрицательным значениям возмущений соответственно.

плотности гравитационно устойчивы ( $\partial\rho_i^*/\partial z < 0$ ), а абсолютная величина градиента плотности  $\partial\rho^*/\partial z$  растет. Это оказывает стабилизирующее влияние на колебательную моду, показанную на рис. 5.11 сплошными линиями. В точке  $\psi_1 = 0.27$  граница устойчивости достигает максимума и при дальнейшем росте  $\psi_1$  начинает понижаться. Заметим, что в области  $\psi_1 > 0.3$ , градиент плотности, вызванный градиентом концентрации второго компонента, становится неустойчивым. Диффузионное время второго компонента в пять раз больше, чем первого ( $s = 0.2$ ). В этом случае развивается так называемая 'пальцевая' неустойчивость (fingering instability) [42]. Она характерна для систем, в которых стратификация по плотности вызвана градиентами концентрации двух независимых компонентов с различными диффузионными временами (или градиентами температуры и концентрации). О смене механизма неустойчивости также свидетельствует резкое увеличение критической

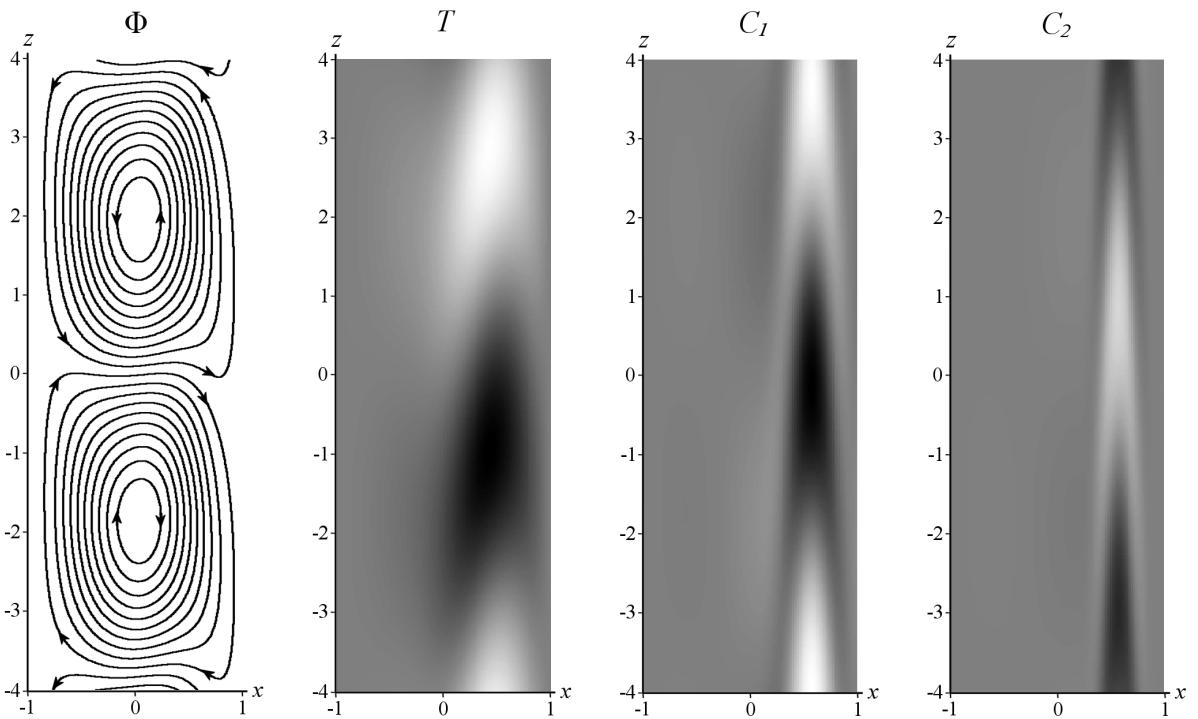


Рис. 5.14. Критические возмущения полей скорости, температуры и концентрации для колебательной неустойчивости в тройной смеси с параметрами  $\psi_1 = 0.5$ ,  $\psi_2 = -0.2$ , ( $\Psi = 0.3$ ),  $s = 0.2$ ,  $Sc_2 = 500$ . Критические параметры неустойчивости  $Gr = 169$ ,  $k = 0.82$ ,  $\lambda_\omega = 8.49$ . Светлые и темные области отвечают положительным и отрицательным значениям возмущений соответственно.

частоты. С увеличением разницы между диффузационными временами компонентов смеси ( $s \rightarrow 0$ ) описанный эффект усиливается. Расчеты показывают, что колебательная неустойчивость развивается в виде двух волн с противоположными фазовыми скоростями  $\lambda_\omega/k$ . Типичная структура критических возмущений представлена на рис. 5.14 (показано возмущение, соответствующее положительному фазовой скорости). Здесь тепловые и концентрационные 'пальцы' расположены вблизи правой стенки, в то время как для возмущения с отрицательной фазовой скоростью они локализованы вблизи левой стенки. Таким образом, критические возмущения температуры и концентрации являются суперпозицией двух волн, распространяющихся вблизи боковых стенок в противоположных направлениях. Заметим, что 'пальцы' первого компонента являются более размытыми, чем 'пальцы' второго компонента, так как его диффузационное время меньше (т.е. он обладает более сильными диффузационны-

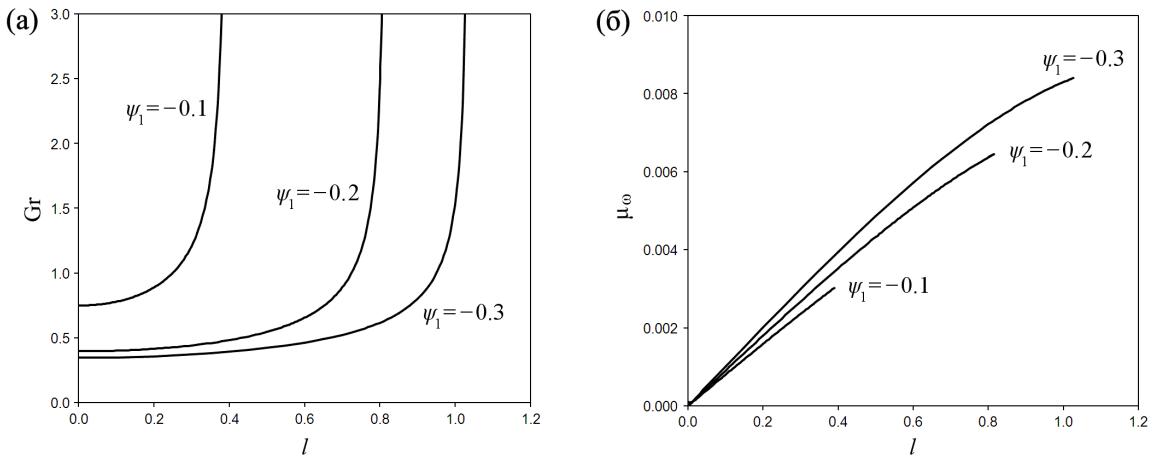


Рис. 5.15. Зависимость критического числа Грасгофа (а) и критической частоты (б) от волнового числа  $l$  для тройной смеси с  $\Psi = 0.3$ ,  $s = 0.2$ ,  $\text{Sc}_2 = 500$ .

ми свойствами). Полный градиент плотности (5.73) становится гравитационно неустойчивым при  $\psi_1 < \psi'_1$ , где

$$\psi'_1 = \frac{s\Psi}{s-1}. \quad (5.74)$$

Полный градиент плотности растет, когда  $\psi_1$  изменяется в отрицательном направлении начиная с точки  $\psi_1 = \psi'_1$  (для  $s = 0.2$  имеем  $\psi'_1 = -0.075$ ). Это оказывает дестабилизирующий эффект на колебательную моду. Заметим, что большие критические числа Грасгофа соответствуют меньшим волновым числам  $k$  и наоборот.

В области  $\psi_1 < \psi'_1$  поперечные возмущения становятся наиболее опасными и приводят к резкому понижению границы устойчивости (см. штриховые линии на рис. 5.11 (а)). Это связано с неустойчивой стратификацией по плотности в вертикальном направлении. Зависимость критического числа Грасгофа и критической частоты от волнового числа  $l$  представлена на рис. 5.15. Они показывают, что неустойчивость является длинноволновой. Однако критическое число Грасгофа здесь не равно нулю (как это было в случае бинарной смеси, см. рис. 5.10 (а)). Дело в том, что для малых чисел Грасгофа вертикальные градиенты концентрации зависят от  $\text{Gr}$ , см. рис. 5.6. Поэтому полный градиент плотности становится неустойчивым, когда число Грасгофа достигает некоторого критического значения. Это значение уменьшается,

когда аномальный эффект термодиффузии первого компонента становится сильнее (т.е.  $|\psi_1|$  увеличивается). Неустойчивость в поперечном направлении колонны подробно обсуждается ниже.

#### 5.2.4 Поперечные возмущения

Перейдем к рассмотрению задачи (5.68)–(5.70) для амплитуд поперечных возмущений. Заметим, что число Грасгофа можно исключить из уравнений задачи путем с помощью преобразования

$$\tilde{w} = \text{Gr } w, \quad (5.75)$$

которое изменяет амплитуду возмущения скорости. В этом случае параметрами, определяющими устойчивость системы, будут концентрационные числа Рэлея  $\mathcal{R}$ , которые характеризуют вертикальные градиенты концентрации. Эти параметры, в свою очередь, зависят от  $\mathcal{SC}, \psi, \text{Gr}$  согласно (5.50). В реальных экспериментах ширина колонны  $2L$  выбирается таким образом, что вертикальное разделение не зависит от приложенной разности температур  $2\Delta T$  (т.е. числа  $\mathcal{R}$  не зависят от  $\text{Gr}$ , см. пункт 5.1.5). Именно этот случай будет интересовать нас в дальнейшем. Исследуем зависимость физических параметров смеси  $\mathcal{SC}$  и  $\psi$  на устойчивость движения в колонне. Прежде всего заметим, что матрица линейной системы уравнений относительно коэффициентов разложения (5.71) всегда вещественна, поэтому собственные значения задачи либо вещественны, либо образуют комплексно–сопряженные пары. Результаты, представленные в следующих теоремах, справедливы для общего случая смеси из  $n$  компонент с диагональной матрицей  $\mathcal{SC}$ .

**Теорема 5.2.** Если концентрационные числа Рэлея  $R_i > 0$  для  $i = 1, \dots, n - 1$ , то  $\mu_r > 0$ . Другими словами, если отношения разделения  $\psi_i$  всех компонентов положительны (см. Теорему 5.1 в пункте 5.1.3 и формулу (5.27)), то система устойчива. В данном случае, все частичные градиенты плотности гравитационно устойчивы ( $\partial\rho_i^*/\partial z < 0$ ).

**Теорема 5.3.** Если концентрационные числа Рэлея  $R_i < 0$  для  $i = 1, \dots, n - 1$ , то  $\mu_\omega = 0$ . Другими словами, если отношения разделения всех

компонентов отрицательны, то поперечные возмущения монотонны. Здесь все частичные градиенты плотности гравитационно неустойчивы ( $\partial \rho_i / \partial z > 0$ ).

**Доказательство Теорем 5.2 и 5.3.** Рассмотрим задачу (5.68)–(5.70) с диагональной матрицей  $\mathcal{SC}$ :

$$w'' - l^2 w + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi} = -\mu w, \quad (5.76)$$

$$\text{Sc}_i^{-1} (\xi_i'' - l^2 \xi_i - R_i w) = -\mu \xi_i, \quad (5.77)$$

$$x = \pm 1 : \quad w = 0, \quad \xi'_i = 0, \quad (5.78)$$

где  $i = 1, \dots, n-1$ . Предполагается, что в исходных уравнениях сделана замена переменной по формуле (5.75) и знак  $\sim$  для простоты отброшен. Умножим уравнения (5.76) и (5.77) на  $\bar{w}$  и  $\bar{\xi}_i$  соответственно (черта означает комплексное сопряжение). Интегрируя полученные уравнения на интервале от  $-1$  до  $1$  с учетом граничных условий (5.78), найдем

$$\int (w')^2 dx + l^2 \int w^2 dx - \int \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi} \bar{w} dx = \mu \int w^2 dx, \quad (5.79)$$

$$\text{Sc}_i^{-1} \left( \int (\xi'_i)^2 dx + l^2 \int \xi_i^2 dx + R_i \int w \bar{\xi}_i dx \right) = \mu \int \xi_i^2 dx. \quad (5.80)$$

В этих формулах (а также во всех формулах ниже) пределы интегрирования для краткости опущены. Добавим к уравнению (5.79) его комплексно–сопряженное. Аналогично, уравнение (5.80) умножается на  $\text{Sc}_i/R_i$  и складывается с его комплексно–сопряженным. Суммируя полученные уравнения по  $i = 1, \dots, n-1$ , получим

$$(\bar{\mu} + \mu) \int w^2 dx = \quad (5.81)$$

$$= 2 \int (w')^2 dx + 2 l^2 \int w^2 dx - \int (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi} \bar{w} + \mathbf{I} \cdot \bar{\boldsymbol{\xi}} w) dx,$$

$$(\bar{\mu} + \mu) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\text{Sc}_i}{R_i} \int \xi_i^2 dx = \quad (5.82)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2}{R_i} \left( \int (\xi'_i)^2 dx + l^2 \int \xi_i^2 dx \right) + \int (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi} \bar{w} + \mathbf{I} \cdot \bar{\boldsymbol{\xi}} w) dx.$$

Сложим уравнения (5.81) и (5.82):

$$\begin{aligned} & (\bar{\mu} + \mu) \left( \int w^2 dx + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{Sc_i}{R_i} \int \xi_i^2 dx \right) = \\ & = 2 \int (w')^2 dx + 2l^2 \int w^2 dx + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2}{R_i} \left( \int (\xi'_i)^2 dx + l^2 \int \xi_i^2 dx \right). \end{aligned}$$

Все интегралы в этом выражении положительны. При  $R_i > 0$  для  $i = 1, \dots, n-1$  имеем  $\bar{\mu} + \mu > 0$ . Отсюда следует  $\mu_r > 0$ , что доказывает Теорему 5.2.

Теперь вычтем уравнение (5.79) из его комплексно-сопряженного. Аналогично, умножим уравнение (5.80) на  $Sc_i/R_i$  и вычтем его из комплексно-сопряженного уравнения. Суммируя полученные уравнения по  $i = 1, \dots, n-1$ , найдем

$$(\bar{\mu} - \mu) \int w^2 dx = \int (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi} \bar{w} - \mathbf{I} \cdot \bar{\boldsymbol{\xi}} w) dx, \quad (5.83)$$

$$(\bar{\mu} - \mu) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{Sc_i}{R_i} \int \xi_i^2 dx = \int (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi} \bar{w} - \mathbf{I} \cdot \bar{\boldsymbol{\xi}} w) dx. \quad (5.84)$$

Вычитание (5.84) из (5.83) дает

$$(\bar{\mu} - \mu) \left( \int w^2 dx - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{Sc_i}{R_i} \int \xi_i^2 dx \right) = 0.$$

При  $R_i < 0$  для  $i = 1, \dots, n-1$  второй множитель в этом произведении всегда положителен, поэтому  $\bar{\mu} - \mu = 0$ . Отсюда следует  $\mu_\omega = 0$ , что доказывает Теорему 5.3. ■

Теоремы 5.2 и 5.3 можно рассматривать как аналог принципа монотонности возмущений [36] (или принципа смены устойчивости [297]) для вертикального слоя многокомпонентной смеси с эффектом Соре. Численные расчеты для бинарной смеси (пункт 5.2.2) согласуются с указанными результатами.

**Теорема 5.4.** Если суммарное концентрационное число Рэлея  $R > 0$  и  $\mu_r = 0$ , то  $\mu_\omega \neq 0$ . Этот результат также справедлив для  $R = 0$  при условии  $l > 0$ . Другими словами, если нейтральные возмущения существуют при  $R \geq 0$ , то они являются колебательными (за исключением случая  $R = l = 0$ ).

**Доказательство.** Предположим, что условия теоремы выполнены, однако  $\mu_\omega = 0$  (т.е.  $\mu = 0$  является собственным значением амплитудной задачи (5.76)–(5.78)). Собственные функции, соответствующие этому собственному значению, удовлетворяют уравнениям

$$w'' - l^2 w + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0, \quad (5.85)$$

$$\boldsymbol{\xi}'' - l^2 \boldsymbol{\xi} - \mathcal{R} w = 0, \quad (5.86)$$

$$x = \pm 1 : \quad w = 0, \quad \boldsymbol{\xi}' = 0. \quad (5.87)$$

Продифференцируем уравнение (5.85) дважды и подставим выражение для  $\boldsymbol{\xi}''$  из (5.86) в полученное уравнение. Выражая в этом уравнении  $\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi}$  через  $w$  из (5.85) и записывая граничные условия в терминах функции  $w$ , найдем

$$w''' - 2l^2 w'' + (l^4 + R)w = 0, \quad (5.88)$$

$$x = \pm 1 : \quad w = 0, \quad w''' - l^2 w' = 0. \quad (5.89)$$

Заметим, что вещественная и мнимая части функций  $w$  и  $\boldsymbol{\xi}$  удовлетворяют одной и той же задаче. Поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением вещественных решений. Общее решение уравнения (5.88) при  $R > 0$  дается формулой [298]

$$w = e^{-\alpha x} (a_1 \cos \beta x + a_2 \sin \beta x) + e^{\alpha x} (a_3 \cos \beta x + a_4 \sin \beta x),$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{l^4 + R} + l^2}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{R}{2\sqrt{l^4 + R} + 2l^2}},$$

а при  $R = 0$  и  $l > 0$  общее решение имеет вид

$$w = e^{-lx} (a_1 + a_2 x) + e^{lx} (a_3 + a_4 x).$$

Здесь  $a_1 - a_4$  — вещественные постоянные, определяемые из граничных условий (5.89). Определитель соответствующей системы линейных уравнений отличен от нуля, поэтому все постоянные равны нулю, откуда  $w = 0$ . Тогда из (5.86) и (5.87) находим  $\boldsymbol{\xi} = 0$ . Отсюда следует, что  $\mu = 0$  не является собственным значением задачи (5.76)–(5.78). Полученное противоречие доказывает теорему. Что касается случая  $R = l = 0$ , то легко показать, что здесь

имеются нейтральные возмущения вида  $w = 0, \xi = \text{const}$ , которые не являются колебательными. ■

Из Теоремы 5.2 следует, что при положительном  $R$  и, соответственно, положительном  $\Psi$ , нейтральные или растущие возмущения могут существовать только в смесях с тремя или большим числом компонент. Расчеты показывают, что они действительно существуют в некоторой области параметров, см. рис. 5.11 и 5.15. Так как концентрационные числа Рэлея определяются значениями отношений разделения (см. (5.27)), будем исследовать устойчивость системы в терминах последних. На рис. 5.16 показана зависимость критического отношения разделения  $\psi_1$  и критической частоты от волнового числа  $l$ . Минимальное абсолютное критическое значение  $\psi_1$  достигается при  $l = 0$ , таким образом поперечная неустойчивость является длинноволновой. Расчеты показывают, что это критическое значение в точности соответствует значению  $\psi'_1$ , определяемому формулой (5.74). Таким образом, поперечная неустойчивость при положительных  $\Psi$  связана с гравитационной неустойчивостью полного вертикального градиента плотности (5.73), которая имеет место при  $\psi_1 < \psi'_1$ . Расчеты в широкой области параметров подтверждают это утверждение.

На рис. 5.17 показана зависимость минимального критического отношения разделения  $\psi_1$  от суммарного отношения разделения  $\Psi$ . Прямые линии на этом рисунке в точности соответствуют линиям, описываемым уравнением (5.74). С увеличением  $\Psi$  система остается устойчивой при больших абсолютных значениях отрицательного  $\psi_1$ . С уменьшением отношения диффузионных времен  $s$  потенциально неустойчивый градиент плотности, вызванный градиентом концентрации первого компонента, растет (см. (5.72)), в результате чего система становится менее устойчивой. Согласно Теореме 5.4, поперечная неустойчивость для положительных  $\Psi$  является колебательной. Результаты расчетов согласуются с данным утверждением, см. рис. (5.16) (б). Заметим, что критическая частота уменьшается с уменьшением  $l$ , однако она не обращается в ноль в точке  $l = 0$  согласно Теореме 5.4.

**Теорема 5.5.** При  $R \leq 0$  существует счетное число нейтральных воз-

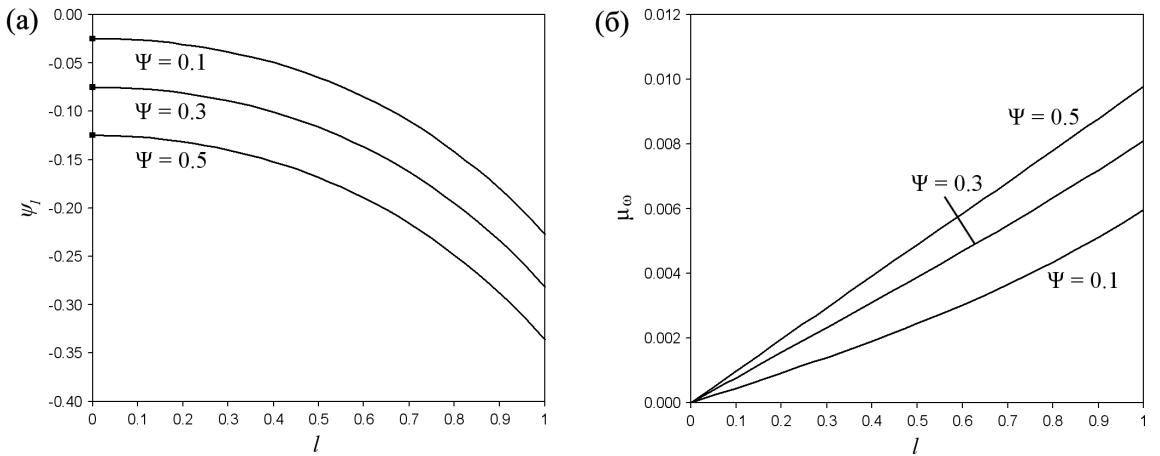


Рис. 5.16. Зависимость критического отношения разделения  $\psi_1$  (а) и критической частоты (б) от поперечного волнового числа  $l$  для тройной смеси с  $s = 0.2$ ,  $Sc_2 = 500$ . Система неустойчива в области, ограниченной сверху представленными кривыми.

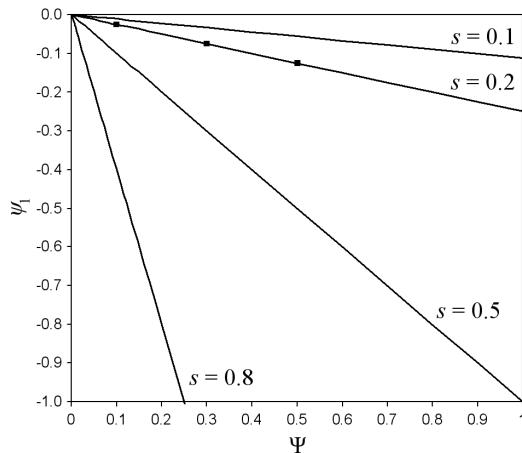


Рис. 5.17. Зависимость минимального критического отношения разделения  $\psi_1$  от суммарного отношения разделения  $\Psi$  при различных значениях параметра  $s = Sc_1/Sc_2$  для тройной смеси с  $Sc_2 = 500$ . Три точки на линии  $s = 0.2$  соответствуют трем точкам на рис. 5.16 (а). Область неустойчивости ограничена сверху представленными линиями.

мущений с  $\mu_\omega = 0$  и соответствующих критических значений числа Рэлея. Минимальное критическое число Рэлея стремится к нулю при  $l \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Нейтральные возмущения с  $\mu_\omega = 0$  удовлетворяют задаче (5.88), (5.89). В монографии [36] было показано, что при  $R < 0$  эта задача имеет счетное число собственных значений  $R$  (т.е. критических значений суммарного концентрационного числа Рэлея) и соответствующих собственных функций. Минимальное критическое число  $|R| \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow 0$ . ■

Численные расчеты показывают, что для отрицательного  $R$  (т.е. для отрицательного суммарного отношения разделения  $\Psi$ ), система всегда неустойчива. Это неустойчивость является монотонной с критической длиной волны  $l = 0$ . Примечателен тот факт, что при  $\Psi < 0$  система неустойчива даже в том случае, когда полный вертикальный градиент плотности является гравитационно устойчивым (т.е. сонаправлен с вектором  $\mathbf{g}$ ). На основе полученных результатов, можно предложить следующую гипотезу для случая произвольной многокомпонентной смеси.

**Гипотеза 5.1.** При  $\Psi \geq 0$  система всегда устойчива относительно поперечных возмущений, если полный вертикальный градиент плотности является гравитационно устойчивым ( $\partial\rho^*/\partial z \leq 0$ ). В противном случае, система неустойчива. Критические возмущения являются колебательными с волновым числом  $l = 0$ . При  $\Psi < 0$  система всегда неустойчива. Критические возмущения являются монотонными с волновым числом  $l = 0$ .

Если суммарное отношение разделения принадлежит интервалу  $-1 < \Psi < 2$  (что соответствует большинству практических случаев), в формуле (5.27) можно использовать приближение  $R/\Psi \sim 63/2$ . Тогда полный вертикальный градиент плотности можно записать в виде

$$\frac{\partial\rho^*}{\partial z} = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial C_i}{\partial z} = -\frac{63}{2\text{Gr}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\psi_i}{\text{Sc}_i}. \quad (5.90)$$

Приравнивая этот градиент к нулю, можно легко определить границу устойчивости для положительных  $\Psi$ . Заметим, что если гипотеза 5.1 справедлива, то она также верна и для смесей с эффектом перекрестной диффузии, так как суммарное отношение разделения и сумма безразмерных концентраций инвариантны относительно преобразования, исключающего коэффициенты перекрестной диффузии (см. Утверждение 3.2 в пункте 3.3.2). Для учета эффекта перекрестной диффузии необходимо сделать следующую замену в (5.90):

$$\text{Sc}_i \rightarrow \nu_i^{-1}, \quad \boldsymbol{\psi} \rightarrow BQ(BV)^{-1} \boldsymbol{\psi},$$

где  $\nu_i$  — собственные значения матрицы  $\mathcal{SC}$  (см. пункт 3.3.2).

Полученные результаты свидетельствуют о том, что плоская термодиф-

фузионная колонна может использоваться для измерения коэффициентов термодиффузии в смесях с тремя или большим числом компонент в случаях, когда эффект Соре для одного или нескольких компонентов является аномальным. В бинарных смесях, такие измерения возможны только при нормальном эффекте Соре. Более подробное исследование данного вопроса требует проведения численного моделирования. Следует отметить, что в реальной колонне поперечная неустойчивость возникает на максимально возможной длине волны, которая равна глубине колонны  $2S$  (рис. 5.8). Уменьшение глубины колонны приводит к повышению порога устойчивости относительно поперечных возмущений.

### 5.2.5 Пример тройной смеси

В качестве примера рассмотрим тройную смесь углеводородов, описанную в пункте 5.1.6. К сожалению, для данной смеси неизвестно значение коэффициента температуропроводности. Типичное для жидких смесей значение  $\chi = 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с дает число Прандтля  $Pr = 11.73$ . Расчеты показывают, что для данной смеси наиболее опасными являются продольные колебательные возмущения с критическими параметрами  $Gr = 82.55$ ,  $k = 1.27$ ,  $\omega = 6.68$ . В колонне шириной 1.59 мм эти параметры соответствуют возмущениям с длиной волны 3.93 мм и частотой 1.97 Гц, возникающим при разности температур 46.9 К между вертикальными стенками.

## 5.3 Влияние высокочастотной вибрации на разделение смеси

### 5.3.1 Постановка задачи

В данном параграфе исследуется задача о влиянии высокочастотной вибрации на конвекцию и разделение бинарной смеси в колонне. Рассмотрим плоскую термодиффузционную колонну, изображенную на рис. 5.18. Принцип разделения смеси в колонне был подробно описан в пункте 5.1.1. Предполага-

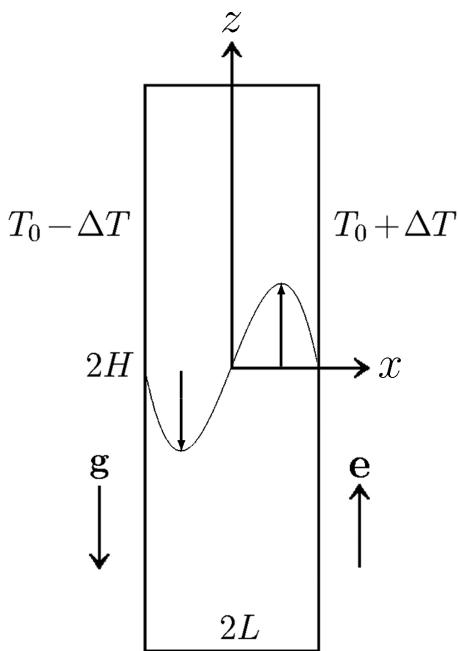


Рис. 5.18. Геометрия рабочей области термодиффузационной колонны.

ется, что плотность смеси линейно зависит от температуры  $T$  и концентрации  $C$  согласно (2.12), при этом  $C$  есть концентрация легкого компонента. В отсутствии внешней вибрации стационарная конвекция в колонне описывается решением, общий вид которого дается формулами (5.1). Это решение принадлежит к классу инвариантных решений вида (5.2).

Пусть колонна совершает гармонические колебания с круговой частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$  в направлении вектора  $\mathbf{e} = (0, 1)$  (т.е. параллельно направлению силы тяжести). Частота и амплитуда вибраций удовлетворяют условиям (3.39), (3.40) (таким образом, рассматриваются высокочастотные вибрации малой амплитуды). В этом случае поля скорости, давления, температуры и концентрации можно представить в виде суммы двух составляющих — осредненной и пульсационной. Осредненные составляющие удовлетворяют уравнениям (3.41)–(3.45), а пульсационные определяются по формулам (3.46).

Осредненное конвективное движение в плоской колонне, возникающее под действием вибрации, может быть описано инвариантным решением ранга 1 двумерных уравнений (3.41)–(3.45) относительно подгруппы, порождаемой

операторами (см. (3.53)):

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad H_3(1) + BU_C = \frac{\partial}{\partial z} + B\beta_C\rho_0gz\frac{\partial}{\partial p} + B\frac{\partial}{\partial C} + B\beta_Cz\frac{\partial}{\partial F}.$$

Общий вид решения, инвариантного относительно данной подгруппы, дается формулами

$$\mathbf{u} = (u(x), w(x)), \quad p = p(x) + B\beta_C\rho_0gz^2/2, \quad (5.91)$$

$$T = T(x), \quad C = C(x) + Bz, \quad F = F(x) + B\beta_Cz^2/2,$$

где  $B$  — некоторая постоянная. Из уравнения неразрывности  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  следует  $u = \text{const}$ . Предполагается, что смесь в колонне движется только в вертикальном направлении (см. пункт 5.1.1), поэтому в дальнейшем полагаем  $u = 0$ .

Осредненная скорость, температура и концентрация в колонне удовлетворяют условиям (5.3), (5.4), (5.5), (5.7), где вектор  $\mathbf{C}$  следует заменить функцией  $C$ . Условие для амплитуды колебаний давления  $F$  получается путем подстановки выражения для  $\mathbf{w}$  из (3.48) в (3.47) с учетом того, что вектор нормали к стенкам колонны есть  $\mathbf{n} = (1, 0)$ :

$$x = \pm 1 : \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Введем безразмерные переменные по формулам (5.10). В качестве характеристического масштаба для функции  $F$  возьмем  $\beta_T \Delta TL$ . Осредненные уравнения (3.41)–(3.45) в безразмерных переменных принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \text{Gr} (T + C) \mathbf{e}_3 + \\ &+ \text{Gs} \text{Pr}^{-1} ((T + C) \mathbf{e} - \nabla F) \cdot \nabla \nabla F, \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \text{Pr}^{-1} \nabla^2 T, \quad (5.93)$$

$$\partial_t C + \mathbf{u} \cdot \nabla C = \text{Sc}^{-1} (\nabla^2 C - \psi \nabla^2 T), \quad (5.94)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.95)$$

$$\nabla^2 F - (\nabla T + \nabla C) \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (5.96)$$

где  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Уравнения содержат пять безразмерных параметров: число Прандтля  $\text{Pr} = \nu/\chi$ , число Шмидта  $\text{Sc} = \nu/\mathcal{D}$ , число Грасгофа  $\text{Gr} =$

$g\beta_T \Delta T L^3 / \nu^2$ , отношение разделения  $\psi = -\mathcal{D}_T \beta_C / (\mathcal{D} \beta_T)$  и число Гершуни

$$G_S = \frac{(A\omega\beta_T \Delta T L)^2}{2\nu\chi},$$

характеризующее вибрационное воздействие (известное также как вибрационное число Рэлея [46]).

Общий вид решения (5.91) с учетом  $u = 0$  записывается в безразмерных переменных следующим образом:

$$\mathbf{u} = (0, w(x)), \quad p = p(x) + \frac{R}{2Sc} z^2, \quad T = T(x), \quad (5.97)$$

$$C = c(x) + \frac{R}{Gr Sc} z, \quad F = f(x) + \frac{R}{2Gr Sc} z^2,$$

где  $R = g\beta_C BL^4 / \nu\mathcal{D}$  — концентрационное число Рэлея, зависящее от вертикального градиента концентрации  $B$ .

Условия задачи в безразмерных переменных принимают вид

$$x = \pm 1 : \quad w = 0, \quad T = \pm 1, \quad (5.98)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} - \psi \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad (5.99)$$

$$\int_{-1}^1 w dx = 0, \quad \int_{-1}^1 C dx = 0, \quad (5.100)$$

$$Gr \int_{-1}^1 C w dx - \frac{2R}{Sc^2} = 0. \quad (5.101)$$

Физический смысл этих условий подробно описан в пункте 5.1.1.

### 5.3.2 Построение решения

Подставляя представление решения (5.97) в систему (5.92)–(5.96) и интегрируя полученные равенства с учетом поставленных условий, найдем выражения для осредненного давления  $p$  и амплитуды колебаний давления  $F$ :

$$p = \frac{R}{2Sc} z^2 + p_0, \quad F = \frac{R}{2Gr Sc} z^2 + f_0,$$

где  $f_0$ ,  $p_0$  — произвольные постоянные. Введем функцию тока

$$\Phi(x) = - \int_{-1}^x w(\tau) d\tau, \quad w = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - \left( \text{Gr} + \frac{\text{Gs } R}{\text{Gr } \text{Pr } \text{Sc}} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{R}{\text{Gr}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Из второго уравнения в (5.102) и соответствующего граничного условия (5.98) следует, что  $T = x$ . Тогда из третьего уравнения с учетом граничных условий (5.99) получаем представление для концентрации в виде

$$C = -\frac{R}{\text{Gr}} \int_{-1}^x \Phi(\tau) d\tau + \psi x + \frac{R}{\text{Gr } \text{Sc}} z + c^*,$$

где  $c^*$  находится из второго условия в (5.100). В результате приходим к следующей задаче для функции тока

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + R \left( 1 + \frac{\text{Gs } R}{\text{Gr}^2 \text{Pr } \text{Sc}} \right) \Phi = \text{Gr} \left( 1 + \frac{\text{Gs } R}{\text{Gr}^2 \text{Pr } \text{Sc}} \right) \left( 1 + \psi \right), \quad (5.103)$$

$$\Phi(-1) = \Phi(1) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(-1) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(1) = 0, \quad (5.104)$$

$$\text{Gr } \psi \int_{-1}^1 \Phi(x) dx - R \int_{-1}^1 \Phi^2(x) dx - \frac{2R}{\text{Sc}^2} = 0. \quad (5.105)$$

Условия (5.104) следуют из первых равенств в (5.98) и (5.100), а соотношение (5.105) получается из условия (5.101).

В дальнейшем нас будет интересовать влияние вибрации на разделение смеси, вызванное термодиффузией и гравитационной конвекцией в колонне. Поэтому предполагается, что  $\text{Gr} > 0$ . Заметим, что при отсутствии вибрации ( $\text{Gs} = 0$ ) задача (5.103)–(5.105) сводится к задаче (5.24), (5.25), (5.49), в которой следует рассмотреть частный случай бинарной смеси. Решение последней задачи было исследовано в параграфе 5.1.

Найдем решение поставленной задачи в зависимости от значений отношения разделения  $\psi$ . Для удобства введем обозначение

$$R^* = R \left( 1 + \frac{\text{Gs } R}{\text{Gr}^2 \text{Pr } \text{Sc}} \right). \quad (5.106)$$

**1. Случай**  $\psi = 0$ . Из условия (5.105) имеем  $R = 0$ . В результате получаем решение

$$\Phi = \frac{\text{Gr}}{24} (x^2 - 1)^2, \quad w = \frac{\text{Gr}}{6} (x^3 - x), \quad T = x, \quad C = 0.$$

В данном случае эффект Соре отсутствует и разделение смеси в горизонтальном и вертикальном направлениях не происходит. Конвекция вызвана только неоднородностью температуры.

**2. Случай**  $\psi = -1$ . Здесь уравнение (5.103) становится однородным и в случае  $R^* \geq 0$  имеет единственное решение  $\Phi = 0$ . Тогда из (5.105) следует  $R = 0$  и соответственно  $R^* = 0$ . Решение задачи имеет вид

$$w = 0, \quad T = x, \quad C = -x.$$

Здесь горизонтальное разделение смеси вызвано только эффектом Соре, а вертикальное разделение не возникает из-за отсутствия конвекции.

При  $R^* < 0$  нетривиальное решение уравнения (5.103) существует только для таких значений параметров задачи, которые удовлетворяют уравнению  $\cos 2\gamma \operatorname{ch} 2\gamma - 1 = 0$ , где  $\gamma = (-R^*)^{1/4}$ . Эти вырожденные случаи здесь не рассматриваются. Заметим, что при  $R^* < 0$  из (5.106) следует  $R < 0$ , т.е. направление вертикального градиента концентрации легкого компонента совпадает с направлением силы тяжести. В этом случае вертикальная стратификация является гравитационно неустойчивой и соответствующее стационарное решение на практике не реализуется (см. параграф 5.2).

**3. Случай**  $\psi \neq 0, -1$ . Решение задачи зависит от знака  $R^*$ .

**A. Случай**  $R^* = 0$  возможен либо при  $R = 0$ , либо при  $R = -\text{Gr}^2 \Pr \text{Sc}/\text{Gs}$ . При  $R = 0$  интегрирование уравнения (5.103) с граничными условиями (5.104) дает

$$\Phi = \frac{\text{Gr}(\psi + 1)}{24} (x^2 - 1)^2.$$

Подстановка найденной функции тока в условие (5.105) дает возможности  $\psi = 0$  или  $\psi = -1$ , которые были рассмотрены выше. Пусть теперь  $R = -\text{Gr}^2 \Pr \text{Sc}/\text{Gs}$ , тогда задача имеет только тривиальное решение  $\Phi = 0$ . Из условия (5.105) следует  $R = 0$ , что противоречит исходному предположению

об отрицательности  $R$ .

Перейдем теперь к случаю  $R^* \neq 0$  (в предположении  $\psi \neq 0, -1$ ). Здесь функция тока всегда отлична от нуля. Таким образом, в колонне имеет место гравитационная и вибрационная конвекция, интенсивность которой определяется числами Грасгофа  $Gr$  и Гершуни  $Gs$  соответственно. При достаточно больших числах Грасгофа, диффузионный перенос массы легкого компонента в вертикальном направлении, обусловленный наличием градиента концентрации, пренебрежимо мал по сравнению с конвективным переносом. В пункте 5.1.5 было показано, что это справедливо для широкого класса бинарных смесей при  $Gr > 3765/Sc$  (заметим, что для жидких смесей число Шмидта имеет порядок  $Sc \sim 10^3$ ). Таким образом, в указанных условиях можно пренебречь членом  $2R/Sc^2$  в условии (5.101) и, соответственно, последним слагаемым в соотношении (5.105). В дальнейшем будем считать, что указанные условия выполнены.

**Б.** Если  $R^* < 0$ , то искомые функции записываются так:

$$\Phi = \frac{Gr(\psi + 1)}{R} \left[ 1 - \frac{\sin \gamma \operatorname{ch} \gamma x + \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma x}{\sin \gamma \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma} \right],$$

$$w = \frac{Gr(\psi + 1)\gamma}{R} \frac{\sin \gamma \operatorname{sh} \gamma x - \operatorname{sh} \gamma \sin \gamma x}{\sin \gamma \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma}, \quad T = x,$$

$$C = \frac{\psi + 1}{\gamma} \frac{\sin \gamma \operatorname{sh} \gamma x + \operatorname{sh} \gamma \sin \gamma x}{\sin \gamma \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma} - x + \frac{R}{Gr Sc} z,$$

где  $\gamma = (-R^*)^{1/4}$ . Подставляя выражение для функции тока в (5.105) и пренебрегая членом  $2R/Sc^2$ , получим соотношение (5.44), в левой части которого следует заменить  $\Psi(R)$  на  $\psi(R^*)$ , а в правой части положить  $\gamma = (-R^*)^{1/4}$ . Полученное соотношение связывает концентрационное число Рэлея  $R$  с отношением разделения  $\psi$  и другими безразмерными параметрами.

**В.** Если  $R^* > 0$ , то решение задачи имеет представление

$$\Phi = \frac{Gr(\psi + 1)}{R} \left[ 1 + \frac{2(\operatorname{sh} \eta \cos \eta - \sin \eta \operatorname{ch} \eta) \sin \eta x \operatorname{sh} \eta x}{\operatorname{sh} 2\eta + \sin 2\eta} - \right.$$

$$\left. - \frac{2(\sin \eta \operatorname{ch} \eta + \operatorname{sh} \eta \cos \eta) \cos \eta x \operatorname{ch} \eta x}{\operatorname{sh} 2\eta + \sin 2\eta} \right],$$

$$w = \frac{4\eta \text{Gr} (\psi + 1)}{R} \frac{\sin \eta \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta x \cos \eta x - \operatorname{sh} \eta \cos \eta \operatorname{sin} \eta x \operatorname{ch} \eta x}{\sin 2\eta + \operatorname{sh} 2\eta}, \quad T = x,$$

$$C = \frac{2(\psi + 1)}{\eta} \frac{\sin \eta \operatorname{ch} \eta \operatorname{sin} \eta x \operatorname{ch} \eta x + \operatorname{sh} \eta \cos \eta \operatorname{sh} \eta x \cos \eta x}{\sin 2\eta + \operatorname{sh} 2\eta} - x + \frac{R}{\text{Gr Sc}} z,,$$

где  $\eta = (R^*/4)^{1/4}$ . Соотношение между  $R$  и отношением разделения  $\psi$  (а также другими безразмерными параметрами) дается выражением (5.45), в левой части которого следует заменить  $\Psi(R)$  на  $\psi(R^*)$ , а в правой части положить  $\eta = (R^*/4)^{1/4}$ .

### 5.3.3 Влияние вибрации на разделение смеси в колонне

Зависимость между концентрационным числом Рэлея  $R$ , характеризующим вертикальный градиент концентрации, и отношением разделения  $\psi$  представлена на рис. 5.19 для различных чисел Гершуни при  $\text{Pr} = 10$ ,  $\text{Sc} = 1000$ ,  $\text{Gr} = 50$ . При отсутствии вибрации  $G_s = 0$  и  $R^* = R$ . В этом случае кривая  $\psi(R)$  совпадает с кривой, изображенной на рис. 5.2. В пункте 5.1.3 было показано, что уравнение  $\psi = \psi(R)$ , задаваемое соотношениями (5.44) и (5.45), имеет единственное решение относительно  $R$  при заданном  $\psi$  в случае  $\psi > -1$ , имеет бесконечное множество решений в случае  $-5 < \psi < -1$  и не имеет решений при  $\psi < -5$ .

При наличии вибрации  $G_s \neq 0$  и  $R^*$  дается формулой (5.106). В этом случае заданному значению  $\psi > 0$  отвечают два значения  $R$  (положительное и отрицательное), см. рис. 5.19. Это следует из вышеуказанных свойств функции  $\psi = \psi(R^*)$  и того, что  $R^* \rightarrow \infty$  при  $R \rightarrow \pm\infty$ . Заметим, что при нормальном эффекте Соре ( $\psi > 0$ ) легкий компонент накапливается в верхней части колонны, поэтому физически значимым является лишь корень  $R > 0$ . В качестве примера рассмотрим смесь этанол (50%) – вода (50%), которая характеризуется безразмерными параметрами  $\psi = 0.377$ ,  $\text{Pr} = 29$ ,  $\text{Sc} = 7162$ , см. таблицу 2.1. В данном случае  $C$  есть концентрация этанола. Профили осредненной скорости и концентрации в сечении  $z = 0$  показаны на рис. 5.20 для различных чисел Гершуни при  $\text{Gr} = 25$ . Концентрация легкого компонента (этанола) у нагретой (правой) границы возрастает, и благодаря конвекции

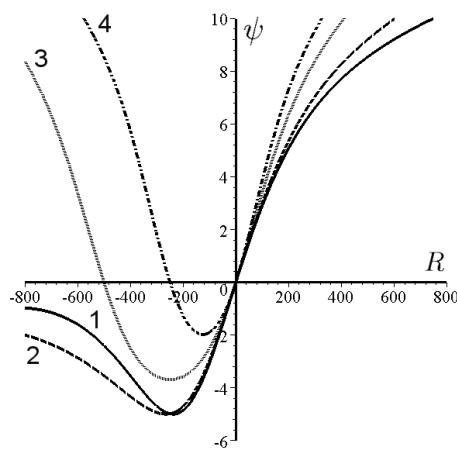


Рис. 5.19. Зависимость между концентрационным числом Рэлея  $R$  и отношением разделения  $\psi$  для различных чисел Гершуни: 1 —  $Gs = 0$ ; 2 —  $Gs = 10^4$ ; 3 —  $Gs = 5 \times 10^4$ ; 4 —  $Gs = 10^5$ . Значения параметров:  $Pr = 10$ ,  $Sc = 1000$ ,  $Gr = 50$ .

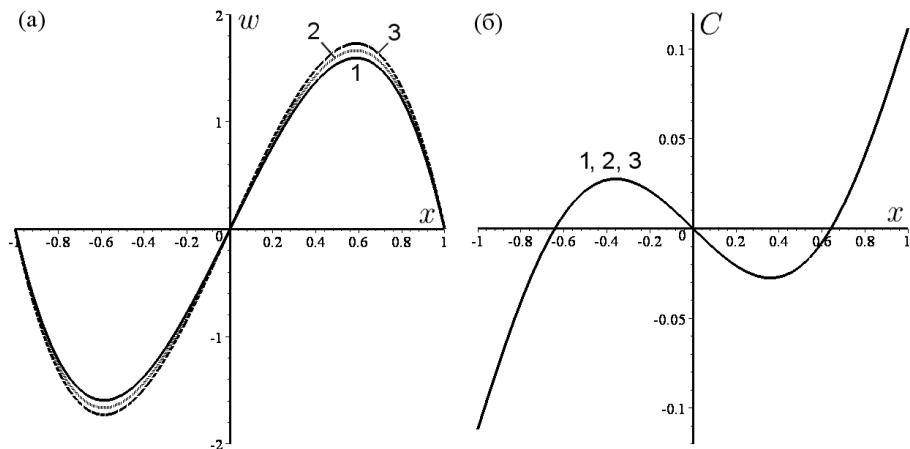


Рис. 5.20. Профили осредненной скорости (а) и концентрации (б) в смеси этанол (50%) — вода (50%) для различных чисел Гершуни: 1 —  $Gs = 0$ ; 2 —  $Gs = 5 \times 10^5$ ; 3 —  $Gs = 10^6$ . Число Грасгофа  $Gr = 25$ .

он накапливается в верхней части колонны. Увеличение интенсивности продольных вибраций приводит к увеличению скорости движения, при этом распределение концентрации практически не изменяется. Как видно из рис. 5.19, увеличение интенсивности продольных вибраций приводит к уменьшению вертикального разделения в колонне при заданном положительном отношении разделения (происходит частичное перемешивание смеси).

На рис. 5.21 показана зависимость концентрационного числа Рэлея  $R$  от числа Гершуни  $Gs$  в смеси этанол–вода для различных чисел Грасгофа. При

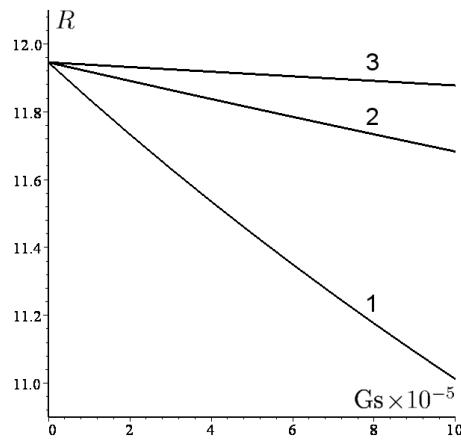


Рис. 5.21. Зависимость концентрационного числа Рэлея  $R$  от числа Гершуни  $Gs$  при различных числах Грасгофа: 1 —  $Gr = 25$ ; 2 —  $Gr = 50$ ; 3 —  $Gr = 100$ .  
Смесь этанол (50%) — вода (50%).

отсутствии вибрации  $Gs = 0$  и  $R = 11.95$ . С ростом числа Гершуни интенсивность вибрационного воздействия увеличивается, что приводит к частичному перемешиванию смеси и уменьшению вертикального градиента концентрации, характеризуемого числом  $R$ . Изменение  $R$  с ростом  $Gs$  становится менее выраженным при увеличении числа Грасгофа. С ростом последнего гравитационная конвекция становится более интенсивной, в результате чего влияние вибрационной конвекции на разделение смеси уменьшается.

## Глава 6

# Термодиффузия в условиях вынужденной конвекции

Проведено обобщение задачи Греца о теплообмене в круглой цилиндрической трубе с течением Пуазейля на случай многокомпонентной смеси с учетом эффектов Соре и Дюфора. На конечном отрезке трубы задан постоянный тепловой поток на стенке, в остальной части трубы является теплоизолированной. С помощью линейных преобразований переменных уравнения и граничные условия для температуры и концентрации каждого компонента сведены к задаче, которая полностью совпадает с задачей Греца для однокомпонентной среды. Отдельно рассмотрен случай, когда такое преобразование невозможно. При наличии только эффекта Соре этот случай соответствует равенству теплового и концентрационного чисел Пекле для выбранного компонента смеси. Изучено влияние эффекта Соре на тепломассообмен в трубе при малых и больших числах Пекле. С помощью численного моделирования исследовано влияние диффузии и термофореза наночастиц на вынужденную конвекцию наножидкости в трубе с заданным потоком тепла на стенке. В расчетах учитывается зависимость теплофизических свойств наножидкости от температуры и объемной концентрации наночастиц. Исследована зависимость локального и среднего коэффициента теплоотдачи от числа Пекле и интенсивности термофореза. Результаты главы основаны на работах [85, 96, 97]. Обзор работ по тематике главы был дан в параграфе 1.4.

## 6.1 Вынужденная конвекция многокомпонентной смеси в круглой трубе

### 6.1.1 Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную круглую трубу радиуса  $R$  с установившимся течением Пуазейля, которое характеризуется профилем скорости

$$V(r) = V_m \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right),$$

где  $V_m$  — характерная (максимальная) скорость (рис. 6.1). Жидкость в трубе является смесью из  $n$  компонентов, при этом компонент  $n$  выбран в качестве растворителя. Смесь поступает в трубу при  $z = -\infty$  с температурой  $T_0$  и концентрациями компонентов  $C_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . На отрезке  $0 \leq z \leq L$  задан постоянный тепловой поток  $q > 0$ , в остальной части трубы теплоизолирована. Стенки трубы непроницаемы для компонентов смеси. Смесь характеризуется плотностью  $\rho$ , теплоемкостью  $c_p$  и теплопроводностью  $\kappa$ . С учетом осевой симметрии и постоянства теплофизических свойств смеси уравнения переноса тепла и массы, а также граничные условия записываются в цилиндрических координатах следующим образом:

$$V(r) \frac{\partial T}{\partial z} = \chi_0 \nabla^2 T + \sum_{j=1}^{n-1} \chi_j \nabla^2 C_j, \quad (6.1)$$

$$V(r) \frac{\partial C_i}{\partial z} = D_{Ti} \nabla^2 T + \sum_{j=1}^{n-1} D_{ij} \nabla^2 C_j, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (6.2)$$

$$T(r, -\infty) = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial r}(0, z) = 0,$$

$$\chi_0 \frac{\partial T}{\partial r}(R, z) + \sum_{j=1}^{n-1} \chi_j \frac{\partial C_j}{\partial r}(R, z) = \begin{cases} q(\rho c_p)^{-1}, & 0 \leq z \leq L, \\ 0, & z < 0, z > L, \end{cases} \quad (6.3)$$

$$C_i(r, -\infty) = C_{i0}, \quad \frac{\partial C_i}{\partial r}(0, z) = 0,$$

$$D_{Ti} \frac{\partial T}{\partial r}(R, z) + \sum_{j=1}^{n-1} D_{ij} \frac{\partial C_j}{\partial r}(R, z) = 0. \quad (6.4)$$

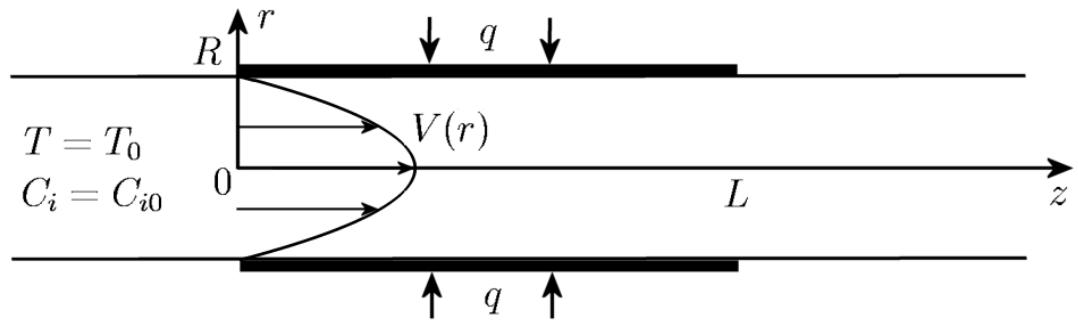


Рис. 6.1. Круглая труба с заданным потоком тепла на стенке.

Условия (6.3) и (6.4) дополняются требованием ограниченности температуры  $T$  и концентраций  $C_i$  при  $z = \infty$ . Обозначения всех величин совпадают с введенными в параграфе 2.2. Коэффициенты  $\chi_j$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$  характеризуют эффект Дюфора. Если этот эффект отсутствует, то коэффициент  $\chi_0$  совпадает с температуропроводностью смеси  $\chi = \kappa(\rho c_p)^{-1}$ . Для оператора Лапласа в цилиндрических координатах введено обозначение

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Задача о нахождении распределения температуры в однокомпонентной среде ( $n = 1$ ) называется *задачей Греца* [248]. Задача (6.1)–(6.4) является ее обобщением на случай многокомпонентной смеси с учетом перекрестных эффектов.

### 6.1.2 Многокомпонентная смесь с эффектами Соре и Дюфора

Уравнения переноса тепла и массы (6.1), (6.2) и граничные условия (6.3), (6.4) связаны между собой благодаря наличию эффектов Соре и Дюфора. Для разделения этих уравнений воспользуемся линейными преобразованиями температуры и концентрации. Введем следующие обозначения:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \chi_0 & \chi_1 & \dots & \chi_{n-1} \\ D_{T1} & D_{11} & \dots & D_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{T,n-1} & D_{n-1,1} & \dots & D_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} T \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} T_0 \\ C_{10} \\ \vdots \\ C_{n-1,0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q(\rho c_p)^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

С использованием этих обозначений задача (6.1)–(6.4) переписывается в виде

$$V(r) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial z} = \Lambda \nabla^2 \mathbf{S}, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{S}(r, -\infty) = \mathbf{S}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial r}(0, z) = 0, \quad \Lambda \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial r}(R, z) = \begin{cases} \mathbf{q}, & 0 \leq z \leq L, \\ 0, & z < 0, z > L. \end{cases} \quad (6.6)$$

Если матрица  $\Lambda$  имеет  $n$  различных собственных значений, то она может быть приведена к диагональному виду с помощью преобразования  $\Lambda' = Q^{-1}\Lambda Q$ . Здесь  $\Lambda' = \text{diag}\{\chi', D'_1, \dots, D'_{n-1}\}$  – диагональная матрица, образованная собственными значениями матрицы  $\Lambda$ , а  $Q$  – матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы  $\Lambda$ . Заметим, что если матрица  $\Lambda$  имеет кратные собственные значения, то диагонализация невозможна. Пример такого случая будет рассмотрен ниже в пункте 6.1.4. Заметим, что матрица коэффициентов диффузии  $D = \{D_{ij}\}$  размерности  $(n-1) \times (n-1)$ , которая является подматрицей  $\Lambda$ , всегда может быть приведена к диагональному виду [290]. Предлагаемый метод решения основан на том, что матрица  $\Lambda$  также может быть диагонализована. Введем линейное преобразование температуры, концентраций и вектора  $\mathbf{q}$  согласно формулам

$$\mathbf{S}' = Q^{-1} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} T' \\ C'_1 \\ \vdots \\ C'_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}'_0 = Q^{-1} \mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} T'_0 \\ C'_{10} \\ \vdots \\ C'_{n-1,0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}' = Q^{-1} \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Задача (6.5), (6.6) в преобразованных переменных принимает вид

$$V(r) \frac{\partial \mathbf{S}'}{\partial z} = \Lambda' \nabla^2 \mathbf{S}', \quad (6.8)$$

$$\mathbf{S}'(r, -\infty) = \mathbf{S}'_0, \quad \frac{\partial \mathbf{S}'}{\partial r}(0, z) = 0, \quad \Lambda' \frac{\partial \mathbf{S}'}{\partial r}(R, z) = \begin{cases} \mathbf{q}', & 0 \leq z \leq L, \\ 0, & z < 0, z > L. \end{cases} \quad (6.9)$$

Так как матрица  $\Lambda'$  является диагональной, задачи для температуры и  $n - 1$  концентрации могут быть решены независимо друг от друга. Заметим, что если преобразованный поток  $q_i$  оказывается равным нулю, то преобразованная концентрация компонента  $i$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) или преобразованная температура ( $i = 0$ ) является постоянной и соответствует значению при  $z = -\infty$ .

Введем безразмерные переменные

$$\eta = \frac{r}{R}, \quad \xi = \frac{z}{\text{Pe}R}, \quad v = \frac{V}{V_m}, \quad \theta = \frac{T' - T'_0}{q_0 R / \chi'}, \quad c_i = \frac{C'_i - C'_{i0}}{q_i R / D'_i},$$

где  $\text{Pe} = V_m R / \chi'$  — тепловое число Пекле. Задача (6.8), (6.9) переписывается в безразмерных переменных следующим образом

$$v(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}, \quad (6.10)$$

$$\frac{\text{Pe}_i}{\text{Pe}} v(\eta) \frac{\partial c_i}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 c_i}{\partial \xi^2}, \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad (6.11)$$

$$\theta(\eta, -\infty) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(0, \xi) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(1, \xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi \leq l, \\ 0, & \xi < 0, \xi > l, \end{cases} \quad (6.12)$$

$$c_i(\eta, -\infty) = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial \eta}(0, \xi) = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial \eta}(1, \xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi \leq l, \\ 0, & \xi < 0, \xi > l, \end{cases} \quad (6.13)$$

где  $v(\eta) = 1 - \eta^2$ ,  $\text{Pe}_i = V_m R / D'_i$  — концентрационное число Пекле компонента  $i$ ,  $l = L(\text{Pe}R)^{-1}$  — безразмерная длина обогреваемого участка.

Введем дополнительную переменную  $\xi_i$  и длину  $l_i$  согласно формулам

$$\xi_i = \frac{\xi}{\text{Pe}_i / \text{Pe}}, \quad l_i = \frac{l}{\text{Pe}_i / \text{Pe}}.$$

В результате задача (6.11), (6.13) принимает вид

$$v(\eta) \frac{\partial c_i}{\partial \xi_i} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\text{Pe}_i^2} \frac{\partial^2 c_i}{\partial \xi_i^2}, \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad (6.14)$$

$$c_i(\eta, -\infty) = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial \eta}(0, \xi_i) = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial \eta}(1, \xi_i) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi_i \leq l_i, \\ 0, & \xi_i < 0, \xi_i > l_i. \end{cases} \quad (6.15)$$

Отсюда следует, что решение  $c_i(\eta, \xi_i, l_i, \text{Pe}_i)$  задачи (6.14), (6.15) можно получить из решения  $\theta(\eta, \xi, l, \text{Pe})$  задачи (6.10), (6.12) путем формальной замены переменных

$$\theta \rightarrow c_i, \quad \xi \rightarrow \xi_i, \quad l \rightarrow l_i, \quad \text{Pe} \rightarrow \text{Pe}_i.$$

Решение тепловой задачи Грэца (6.10), (6.12) было получено в [248] в виде

$$\theta(\eta, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j^+ e^{\lambda_j^+ \xi} (1 - e^{-\lambda_j^+ l}) \varphi_j^+(\eta), \quad \xi < 0, \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \theta(\eta, \xi) = & 4\xi - \frac{\eta^4}{4} + \eta^2 - \frac{7}{24} + \frac{8}{\text{Pe}^2} - \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} A_j^+ e^{\lambda_j^+ (\xi - l)} \varphi_j^+(\eta) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^- e^{\lambda_j^- \xi} \varphi_j^-(\eta), \quad 0 \leq \xi \leq l, \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\theta(\eta, \xi) = 4l + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^- e^{\lambda_j^- \xi} (1 - e^{-\lambda_j^- l}) \varphi_j^-(\eta), \quad \xi > l. \quad (6.18)$$

Здесь  $\lambda_j^- < 0$ ,  $\lambda_j^+ > 0$  — действительные собственные значения,  $\varphi_j^-(\eta)$ ,  $\varphi_j^+(\eta)$  — соответствующие собственные функции задачи

$$\frac{d^2 \varphi_j}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d\varphi_j}{d\eta} + \left( \frac{\lambda_j}{\text{Pe}^2} - 1 + \eta^2 \right) \lambda_j \varphi_j = 0, \quad \frac{d\varphi_j}{d\eta}(0) = \frac{d\varphi_j}{d\eta}(1) = 0. \quad (6.19)$$

Можно показать [248], что  $\lambda_j^- = -(\mu_j^-)^2$ ,  $\lambda_j^+ = (\mu_j^+)^2$  и

$$\varphi_j^- = \exp\left(-\frac{\mu_j^-}{2}\eta^2\right) M(a_j^-, 1, \mu_j^- \eta^2), \quad a_j^- = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_j^-}{2} - \frac{(\mu_j^-)^3}{2\text{Pe}^2}\right), \quad (6.20)$$

$$\varphi_j^+ = \exp\left(-\frac{i\mu_j^+}{2}\eta^2\right) M(a_j^+, 1, i\mu_j^+ \eta^2), \quad a_j^+ = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i\mu_j^+}{2} - \frac{(i\mu_j^+)^3}{2\text{Pe}^2}\right). \quad (6.21)$$

Здесь  $M( , , )$  — функция Куммера [298], а собственные значения  $\mu_j^\pm$  находятся из условия  $d\varphi_j^\pm/d\eta(1) = 0$ . Коэффициенты  $A_j^\pm$  в (6.16)–(6.18) вычисляются по формулам

$$A_j^- = 2 \left( \mu_j^- \frac{\partial}{\partial \mu_j^-} \left( \frac{\partial \varphi_j^-}{\partial \eta}(1) \right) \right)^{-1}, \quad A_j^+ = -2 \left( \mu_j^+ \frac{\partial}{\partial \mu_j^+} \left( \frac{\partial \varphi_j^+}{\partial \eta}(1) \right) \right)^{-1}, \quad (6.22)$$

где собственные функции рассматриваются как функции вида  $\varphi_j^\pm(\eta, \mu_j^\pm)$ , см. (6.20), (6.21). При расчете решения производные  $\partial/\partial \mu_j^\pm$  могут быть вычислены

с помощью центральных разностей. В решении (6.16)–(6.18) берутся действительные части  $\varphi_j^+$  и  $A_j^+$ .

Несмотря на то, что задача (6.14), (6.15) для концентраций  $c_i$  аналогична тепловой задаче (6.10), (6.12), для нее требуется отдельный расчет собственных значений и собственных функций. Для этого необходимо заменить  $\text{Pe}$  на  $\text{Pe}_i$  в (6.19)–(6.21). Заметим, что отношение  $\text{Pe}_i/\text{Pe} = \text{Le}_i$ , где  $\text{Le}_i = \chi'/D'$  – число Льюиса компонента  $i$ . Для жидких смесей  $\text{Le}_i \sim 10^2$ , поэтому концентрационное число Пекле  $\text{Pe}_i$  может быть очень большим даже для небольших тепловых чисел Пекле. В связи с этим представляет интерес решение задачи Греца в пределе  $\text{Pe} \rightarrow \infty$ . В этом случае собственные значения  $\lambda_j^+ \rightarrow \infty$ , поэтому из (6.16), (6.22) следует  $\theta(\eta, \xi) = 0$  при  $\xi < 0$ . Кроме этого, первая сумма в (6.17) обращается в ноль. Для собственных значений  $\lambda_j^- = -(\mu_j^-)^2$  при больших числах Пекле справедлива приближенная формула  $\mu_j^- = 5.3 + 4(j - 1)$ , которая может быть уточнена численно.

Предложенный метод решения задачи о тепломассобмене многокомпонентной смеси в круглой трубе не зависит от метода решения тепловой задачи Греца. Аналогичным образом могут быть решены задачи для плоского канала или области между двумя коаксиальными цилиндрами, которые были изучены ранее для однокомпонентной среды [250, 251]. В то же время, описанный выше метод не может быть использован в случае, когда на непроницаемой для компонентов стенке задается кусочно–непрерывная температура (например,  $T = T_1$  при  $0 \leq z \leq L$  и  $T = T_0$  при  $z < 0, z > L$ ). В этом случае тепловой поток на стенке не является постоянным и исключить температуру из последнего условия (6.4) оказывается невозможным.

### 6.1.3 Многокомпонентная смесь с эффектом Соре

Для жидких смесей эффект Дюфора, как правило, пренебрежимо мал, в то время как эффект Соре является существенным [3]. В связи с важностью последнего эффекта для приложений (в частности, для описания процессов тепломассообмена в наножидкостях [50, 53, 234]) представляет интерес получе-

ние явных формул, описывающих распределение концентрации компонентов в трубе при наличии только эффекта Соре.

В отсутствие эффекта Дюфора необходимо положить  $\chi_j = 0$  в (6.1)–(6.4).

Для исключения коэффициентов перекрестной диффузии приведем матрицу  $D$  к диагональному виду с помощью преобразования  $D' = V^{-1}DV$ . Здесь  $D' = \text{diag}\{D_1, \dots, D_{n-1}\}$  — диагональная матрица из собственных значений матрицы  $D$ ,  $V$  — матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы  $D$ . Матрица  $Q$  в формулах (6.7) принимает вид

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix}.$$

В данном случае температура  $T$  и вектор  $\mathbf{q}$  не изменяются, в то время как матрица  $\Lambda$  преобразуется согласно

$$\Lambda' = Q^{-1}\Lambda Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{D}_T' & D' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_T' = V^{-1}\mathbf{D}_T = \begin{pmatrix} D'_{T1} \\ \vdots \\ D'_{T,n-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{D}_T$  и  $\mathbf{D}_T'$  — исходный и преобразованный векторы коэффициентов термодиффузии соответственно. В результате задача (6.1)–(6.4) в отсутствие эффекта Дюфора приводится к виду

$$V(r)\frac{\partial T}{\partial z} = \chi\nabla^2 T, \quad (6.23)$$

$$V(r)\frac{\partial C'_i}{\partial z} = D'_{Ti}\nabla^2 T + D_i\nabla^2 C'_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (6.24)$$

$$T(r, -\infty) = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial r}(0, z) = 0,$$

$$\chi\frac{\partial T}{\partial r}(R, z) = \begin{cases} q(\rho c_p)^{-1}, & 0 \leq z \leq L, \\ 0, & z < 0, z > L, \end{cases} \quad (6.25)$$

$$C'_i(r, -\infty) = C'_{i0}, \quad \frac{\partial C'_i}{\partial r}(0, z) = 0, \quad D'_{Ti}\frac{\partial T}{\partial r}(R, z) + D_i\frac{\partial C'_i}{\partial r}(R, z) = 0, \quad (6.26)$$

где  $\chi = \kappa(\rho c_p)^{-1}$  — коэффициент температуропроводности смеси.

Введем безразмерные переменные

$$\eta = \frac{r}{R}, \quad \xi = \frac{z}{\text{Pe}R}, \quad v = \frac{V}{V_m}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{qR/\kappa}, \quad c_i = \frac{C'_i - C'_{i0}}{qRD'_{Ti}/\kappa D_i}, \quad (6.27)$$

где  $\text{Pe} = V_m R / \chi$  — тепловое число Пекле. Уравнения и граничные условия (6.23)–(6.26) принимают вид

$$v(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}, \quad (6.28)$$

$$\frac{\text{Pe}_i}{\text{Pe}} v(\eta) \frac{\partial c_i}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 c_i}{\partial \xi^2}, \quad (6.29)$$

$$\theta(\eta, -\infty) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(0, \xi) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(1, \xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi \leq l, \\ 0, & \xi < 0, \xi > l, \end{cases} \quad (6.30)$$

$$c_i(\eta, -\infty) = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial \eta}(0, \xi) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(1, \xi) + \frac{\partial c_i}{\partial \eta}(1, \xi) = 0, \quad (6.31)$$

где  $v(\eta) = 1 - \eta^2$ ,  $\text{Pe}_i = V_m R / D_i$  — концентрационное число Пекле компонента  $i$ ,  $l = L(\text{Pe}R)^{-1}$ .

Для исключения температуры из уравнений переноса массы и соответствующих граничных условий воспользуемся безразмерным аналогом преобразования эквивалентности (3.31):

$$c_i = \frac{\text{Pe}_i}{\text{Pe} - \text{Pe}_i} c'_i + \frac{\text{Pe}}{\text{Pe}_i - \text{Pe}} \theta, \quad \xi_i = \frac{\xi}{\text{Pe}_i / \text{Pe}}, \quad l_i = \frac{l}{\text{Pe}_i / \text{Pe}}. \quad (6.32)$$

Предполагается, что  $\text{Pe}_i \neq \text{Pe}$ . Случай  $\text{Pe}_i = \text{Pe}$  будет рассмотрен отдельно в пункте 6.1.4. В результате уравнения (6.29) и граничные условия (6.31) принимают вид

$$v(\eta) \frac{\partial c'_i}{\partial \xi_i} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial c'_i}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\text{Pe}_i^2} \frac{\partial^2 c'_i}{\partial \xi_i^2}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (6.33)$$

$$c'_i(\eta, -\infty) = 0, \quad \frac{\partial c'_i}{\partial \eta}(0, \xi) = 0, \quad \frac{\partial c'_i}{\partial \eta}(1, \xi_i) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi_i \leq l_i, \\ 0, & \xi_i < 0, \xi_i > l_i. \end{cases} \quad (6.34)$$

Отсюда следует, что решение  $c'_i(\eta, \xi_i, l_i, \text{Pe}_i)$  задачи (6.33), (6.34) можно получить из решения  $\theta(\eta, \xi, l, \text{Pe})$  задачи (6.28), (6.30) путем формальной замены переменных

$$\theta \rightarrow c'_i, \quad \xi \rightarrow \xi_i, \quad l \rightarrow l_i, \quad \text{Pe} \rightarrow \text{Pe}_i.$$

После нахождения  $c'_i$  необходимо вернуться к исходным переменным  $\xi$ ,  $l$  и определить  $c_i$  согласно (6.32). Решение тепловой задачи (6.28), (6.30) дается формулами (6.16)–(6.18).

Заметим, что исключение членов, описывающих эффекты Соре и Дюфора, из уравнений конвекции бинарной смеси с помощью линейных преобразований было впервые предложено в работе [299]. Впоследствии было показано, что эти преобразования принадлежат к группе Ли преобразований эквивалентности [71], которые действуют на произвольные константы в уравнениях, сохраняя их дифференциальную структуру неизменной (см. пункт 3.1.2 и параграф 3.3).

#### 6.1.4 Случай равенства теплового и концентрационного чисел Пекле

Если  $\text{Pe}_i = \text{Pe}$ , то уравнение переноса массы (6.29) для компонента  $i$  не может быть приведено к виду (6.33). Оно должно быть решено с учетом членов, определяемых решением  $\theta(\eta, \xi, l, \text{Pe})$  тепловой задачи Греща (6.28), (6.30). В данном параграфе описывается алгоритм решения задачи массопереноса с помощью модификации метода, предложенного в [247, 248] для решения тепловой задачи Греща.

Введем новую концентрацию по формуле  $c_i = c' - \theta$  и перепишем задачу (6.29), (6.31) в виде

$$v(\eta) \frac{\partial}{\partial \xi} (c' - \theta) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial c'}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 c'}{\partial \xi^2}, \quad (6.35)$$

$$c'(\eta, -\infty) = 0, \quad \frac{\partial c'}{\partial \eta}(0, \xi) = 0, \quad \frac{\partial c'}{\partial \eta}(1, \xi) = 0. \quad (6.36)$$

К этим условиям добавляется условие ограниченности  $c'$  при  $z = \infty$ .

Определим функцию  $\Sigma(\eta, \xi)$ , которую можно интерпретировать как безразмерный поток массы через поперечное сечение радиуса  $\eta$ :

$$\Sigma(\eta, \xi) = \int_0^\eta \left( v(\eta') (c' - \theta) - \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial c'}{\partial \xi} \right) 2\eta' d\eta'. \quad (6.37)$$

Продифференцируем это уравнение по  $\xi$  и, используя уравнение (6.35) и последние два условия в (6.36), найдем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{-1} \Sigma(\eta, \xi) \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \Sigma(1, \xi) = 0.$$

Из второго равенства следует, что  $\Sigma(1, \xi)$  есть константа, значение которой совпадает с  $\Sigma(1, -\infty)$ . Применяя аналогичное соображение к первому равенству и учитывая условия для температуры и концентрации при  $z = -\infty$  в (6.30) и (6.36), найдем

$$\Sigma(\eta, -\infty) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{-1} \Sigma(\eta, \xi) = 0, \quad \Sigma(1, \xi) = 0. \quad (6.38)$$

Заметим, что из (6.37) также следует  $\Sigma(0, \xi) = 0$ . С помощью функции (6.37) уравнение второго порядка (6.35) можно переписать в виде системы из двух уравнений первого порядка

$$\frac{\partial c'}{\partial \xi} = \text{Pe}^2 v(\eta) c' - \frac{\text{Pe}^2}{2\eta} \frac{\partial \Sigma}{\partial \eta} - \text{Pe}^2 v(\eta) \theta, \quad (6.39)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \xi} = 2\eta \frac{\partial c'}{\partial \eta}. \quad (6.40)$$

Границные условия для этой системы определяются формулами (6.38) и первым условием в (6.36). Второе и третье условия в (6.36) следуют из (6.38) и (6.40).

Введем дифференциальный оператор  $\mathcal{L}$  и векторы  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  согласно

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \text{Pe}^2 v(\eta) & -\frac{\text{Pe}^2}{2\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} c'(\eta, \xi) \\ \Sigma(\eta, \xi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} -\text{Pe}^2 v(\eta) \theta(\eta, \xi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.41)$$

и перепишем систему (6.39), (6.40) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi} = \mathcal{L} \mathbf{f} + \mathbf{g}. \quad (6.42)$$

Определим гильбертово пространство  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ , где  $\mathcal{H}_1$  и  $\mathcal{H}_2$  — пространства функций  $\varphi_1(\eta)$  и  $\varphi_2(\eta)$ , определенных на интервале  $[0, 1]$  и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\int_0^1 (\varphi_1(\eta))^2 \eta d\eta < \infty, \quad \int_0^1 (\varphi_2(\eta))^2 \frac{d\eta}{\eta} < \infty.$$

Для двух векторов  $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{H}$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1(\eta) \\ \varphi_2(\eta) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1(\eta) \\ \psi_2(\eta) \end{pmatrix},$$

определим скалярное произведение по формуле

$$(\varphi, \psi) = \int_0^1 \left( \frac{4}{\text{Pe}^2} \varphi_1(\eta) \psi_1(\eta) \eta + \varphi_2(\eta) \psi_2(\eta) \frac{1}{\eta} \right) d\eta. \quad (6.43)$$

Введем область определения дифференциального оператора  $\mathcal{L}$  в пространстве  $\mathcal{H}$  следующим образом

$$D(\mathcal{L}) = \{\varphi \in \mathcal{H} : \mathcal{L}\varphi \in \mathcal{H}, \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{-1} \varphi_2(\eta) = \varphi_2(1) = 0\}. \quad (6.44)$$

Заметим, что из условий (6.44) следует  $\varphi_2(0) = 0$ . Можно показать, что оператор  $\mathcal{L}$ , определенный согласно (6.41) и (6.44), является симметричным оператором в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  [247, 248], т.е.  $(\mathcal{L}\varphi, \psi) = (\varphi, \mathcal{L}\psi)$ . Поставим для данного оператора задачу Штурма–Лиувилля, которая в силу симметричности  $\mathcal{L}$  является самосопряженной:

$$\mathcal{L}\psi_j = \lambda_j \varphi_j, \quad \varphi_j \in D(\mathcal{L}).$$

Отсюда следует

$$\text{Pe}^2 v(\eta) \varphi_{j1}(\eta) - \frac{\text{Pe}^2}{2\eta} \frac{d\varphi_{j2}(\eta)}{d\eta} = \lambda_j \varphi_{j1}(\eta), \quad (6.45)$$

$$2\eta \frac{d\varphi_{j1}(\eta)}{d\eta} = \lambda_j \varphi_{j2}(\eta). \quad (6.46)$$

Подставляя выражение для  $\varphi_{j2}$  из (6.46) в (6.45) и полагая  $\varphi_{j1} \equiv \varphi_j$ , получим задачу (6.19), граничные условия в которой следуют из (6.44), (6.46).

Самосопряженный оператор  $\mathcal{L}$  имеет вещественные собственные значения  $\lambda_j^- < 0$  и  $\lambda_j^+ > 0$ , которым соответствуют собственные вектор–функции  $\varphi_j^-$  и  $\varphi_j^+$ , первые компоненты которых даются формулами (6.20), (6.21). Собственные векторы, нормализованные в соответствии с (6.43), образуют ортонормированный базис в  $\mathcal{H}$ . Вектора  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$ , определенные формулами (6.41), при каждом  $\xi$  можно рассматривать как элементы гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ . Они могут быть представлены в виде

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{f}, \varphi_j)}{\|\varphi_j\|^2} \varphi_j, \quad \mathbf{g} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{g}, \varphi_j)}{\|\varphi_j\|^2} \varphi_j, \quad (6.47)$$

где  $\|\varphi_j\|^2 = (\varphi_j, \varphi_j)$ , и суммирование берется по всем собственным векторам, соответствующим отрицательным и положительным собственным значениям.

Заметим, что вектор  $\mathbf{g}$  в (6.41) полностью определяется решением  $\theta(\eta, \xi)$  тепловой задачи (6.28), (6.30). Уравнение для коэффициентов вектора  $\mathbf{f} \in D(\mathcal{L})$  получается скалярным умножением уравнения (6.42) на  $\varphi_j$  и использованием соотношений  $(\mathcal{L}\mathbf{f}, \varphi_j) = (\mathbf{f}, \mathcal{L}\varphi_j) = \lambda_j(\mathbf{f}, \varphi_j)$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\mathbf{f}, \varphi_j) = \lambda_j(\mathbf{f}, \varphi_j) + (\mathbf{g}, \varphi_j).$$

Решая это уравнение отдельно для отрицательных и положительных собственных значений, получим

$$(\mathbf{f}, \varphi_j^-) = C_j^- e^{\lambda_j^- \xi} + \int_{-\infty}^{\xi} (\mathbf{g}, \varphi_j^-) e^{\lambda_j^- (\xi - \xi')} d\xi', \quad (6.48)$$

$$(\mathbf{f}, \varphi_j^+) = C_j^+ e^{\lambda_j^+ \xi} - \int_{\xi}^{\infty} (\mathbf{g}, \varphi_j^+) e^{\lambda_j^+ (\xi - \xi')} d\xi'. \quad (6.49)$$

Из ограниченности решения при  $\xi = \pm\infty$  следует  $C_j^- = C_j^+ = 0$ . Учитывая, что  $\varphi_{j1} \equiv \varphi_j$  (см. (6.20), (6.21)), найдем

$$(\mathbf{g}, \varphi_j^\pm) = - \int_0^1 4v(\eta) \theta(\eta, \xi') \varphi_j^\pm(\eta) \eta d\eta, \quad (6.50)$$

где  $\theta(\eta, \xi')$  дается формулами (6.16)–(6.18), в которых следует положить  $\xi = \xi'$ . Величины  $\|\varphi_j\|^2$  в (6.47) связаны с коэффициентами  $A_j$  в (6.22) формулами

$$\|\varphi_j^-\|^2 = \frac{4 \varphi_j^-(1)}{\mu_j^- A_j^-}, \quad \|\varphi_j^+\|^2 = \frac{4 \varphi_j^+(1)}{\mu_j^+ A_j^+}.$$

Заметим, что собственные функции  $\varphi_j^\pm$  в (6.50) совпадают с собственными функциями в разложении  $\theta(\eta, \xi')$  в силу  $\text{Pe}_i = \text{Pe}$ . Вычисление коэффициентов разложения по формуле (6.50) приводит к их представлению в виде ряда, который необходимо проинтегрировать в соответствии с (6.48), (6.49) и подставить в разложение функции  $\mathbf{f}$  в (6.47). При этом получаются громоздкие выражения, которые здесь не приводятся. Заметим, что точное выполнение равенства  $\text{Pe}_i = \text{Pe}$  для реальных смесей является маловероятным. Таким образом, в практических случаях решение задачи тепломассообмена смеси в условиях вынужденной конвекции может быть получено методом, описанным в пункте 6.1.3.

### 6.1.5 Тепломассообмен при малых числах Пекле

Рассмотрим пример тепломассообмена бинарной смеси в круглой трубе с заданным потоком тепла на стенке при наличии эффекта Соре. Решение для температуры  $\theta(\eta, \xi, l, \text{Pe})$  дается формулами (6.16)–(6.22), в то время как решение для концентрации вычисляется согласно

$$c = \frac{\text{Pe}_c}{\text{Pe} - \text{Pe}_c} c'(\eta, \xi_c, l_c, \text{Pe}_c) + \frac{\text{Pe}}{\text{Pe}_c - \text{Pe}} \theta(\eta, \xi, l, \text{Pe}), \quad (6.51)$$

$$\xi_c = \frac{\xi}{\text{Pe}_c/\text{Pe}}, \quad l_c = \frac{l}{\text{Pe}_c/\text{Pe}}.$$

Здесь  $\text{Pe}_c = V_m R / \mathcal{D}$  — концентрационное число Пекле, определенное по коэффициенту диффузии бинарной смеси  $\mathcal{D}$ . Выражение для функции  $c'$  получается путем формальной замены переменных в (6.16)–(6.22):

$$\theta \rightarrow c', \quad \xi \rightarrow \xi_c, \quad l \rightarrow l_c, \quad \text{Pe} \rightarrow \text{Pe}_c.$$

Обозначим через  $N_\theta$  и  $N_c$  количество членов ряда в разложении для  $\theta$  и  $c'$  соответственно.

Профили безразмерной температуры и концентрации в радиальных и осевых сечениях трубы при  $\text{Pe} = 5$ ,  $\text{Pe}_c = 25$  показаны на рис. 6.2 и 6.3. Постоянный тепловой поток задан на участке  $0 \leq \xi \leq l = 10$ , в остальной части трубы теплоизолирована. Двумерные поля температуры и концентрации представлены на рис. 6.4. При расчетах учитывалось  $N_\theta = N_c = 30$  членов ряда. Из рисунков видно, что благодаря теплопроводности в осевом направлении тепло проникает в область, расположенную перед входом в обогреваемый участок. Температура растет вниз по течению и выходит на постоянное значение после прохождения обогреваемого участка. Градиенты температуры вызывают разделение смеси под действием эффекта Соре, см. рис. 6.3 и 6.4. Безразмерная концентрация возрастает в центральной части трубы, где жидкость холоднее, и уменьшается вблизи стенки, где жидкость более горячая. Профиль размерной концентрации определяется знаком коэффициента термодиффузии  $\mathcal{D}_T$ , который входит в масштаб концентрации в формулах (6.27). Напомним, что положительный (отрицательный) коэффициент  $\mathcal{D}_T$  соответствует случаю,

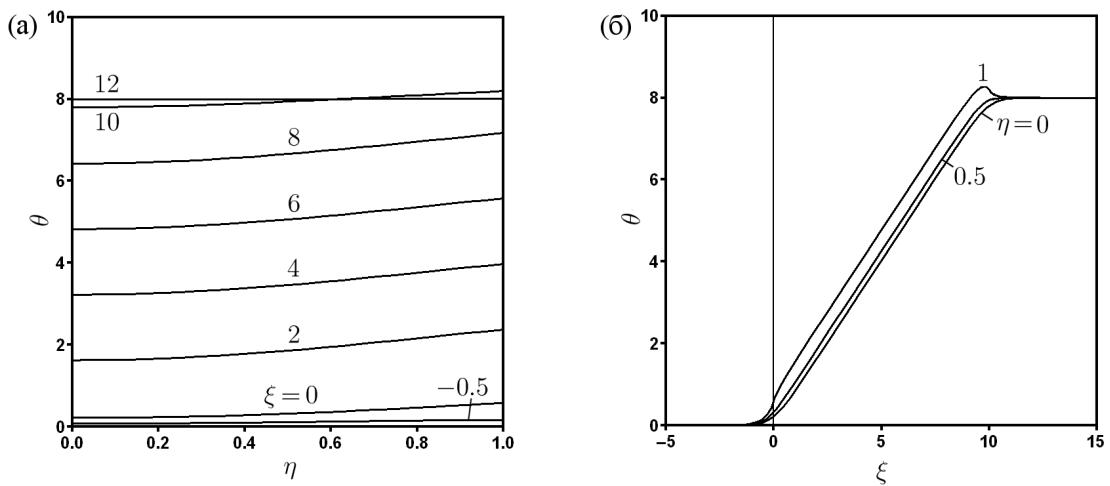


Рис. 6.2. Профили безразмерной температуры в сечениях трубы, соответствующих постоянным значениям осевой (а) и радиальной (б) координат при  $Pe = 5$ ,  $Pe_c = 25$ .  
Обогреваемый участок  $0 \leq \xi \leq 10$ .

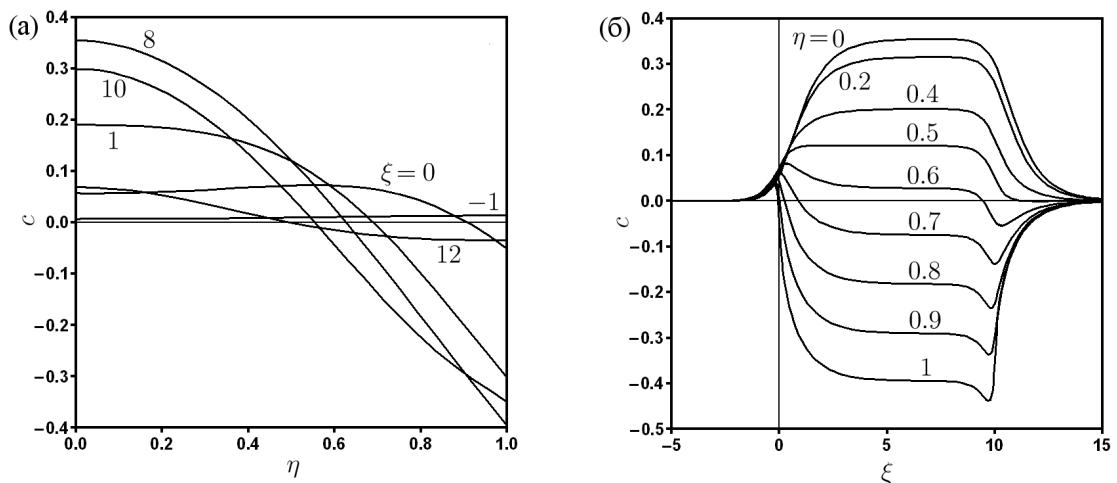


Рис. 6.3. Профили безразмерной концентрации в сечениях трубы, соответствующих постоянным значениям осевой (а) и радиальной (б) координат при  $Pe = 5$ ,  $Pe_c = 25$ .  
Обогреваемый участок  $0 \leq \xi \leq 10$ .

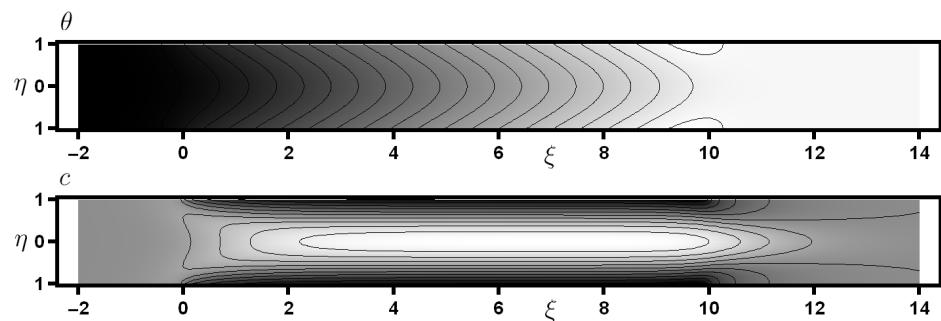


Рис. 6.4. Поля безразмерной температуры  $\theta$  и концентрации  $c$  при  $Pe = 5$ ,  $Pe_c = 25$ .  
Обогреваемый участок  $0 \leq \xi \leq 10$ . Светлые (темные) области соответствуют большим (меньшим) значениям. Показаны изолинии температуры и концентрации.

когда выбранный компонент смеси перемещается в область меньшей (большой) температуры под действием эффекта Соре, см. пункт 2.1.1. Небольшое изменение концентрации заметно в области перед входом в обогреваемый участок благодаря наличию там градиентов температуры, см. рис. 6.2 (б) и 6.3 (б). После прохождения обогреваемого участка, градиент концентрации постепенно размывается под действием диффузии и на значительном расстоянии от этого участка концентрация вновь становится однородной.

Тепломассообмен в смесях при больших числах Пекле будет подробно исследован в параграфе 6.2.

### 6.1.6 Влияние эффекта Дюфора

Кратко остановимся на влиянии эффекта Дюфора на тепломассообмен в бинарной смеси. Заметим, что даже в газах вклад этого эффекта в общий баланс тепла и массы весьма мал по сравнению с теплопроводностью, диффузией и термодиффузией [291]. Будем предполагать, что эффект Дюфора вызывает небольшие возмущения полей температуры и концентрации, при этом основной вклад в формирование этих полей вносят другие механизмы переноса.

Диффузионные потоки тепла и массы в бинарной смеси могут быть записаны в виде [36]

$$\mathcal{J}_h = -(\kappa + \rho \mathcal{D}_T^2 \mathcal{D}^{-1} \mathcal{N}) \nabla T - \rho \mathcal{D}_T \mathcal{N} \nabla C, \quad (6.52)$$

$$\mathcal{J} = -\rho \mathcal{D}_T \nabla T - \rho \mathcal{D} \nabla C. \quad (6.53)$$

Параметр  $\mathcal{N}$  характеризует эффект Дюфора и определяется формулой

$$\mathcal{N} = T_0 \left( \frac{\partial \mu^*}{\partial C} \right)_{T,p} > 0$$

где  $\mu^*$  — химический потенциал смеси. Этот параметр рассчитывается при постоянных характерных значениях температуры  $T_0$  (в кельвинах) и концентрации  $C_0$ .

Эффект Дюфора влияет на перенос тепла двумя способами. Во-первых, он усиливает теплопроводность (первый член в (6.52)), во-вторых, вызывает

дополнительный поток тепла под действием градиента концентрации (второй член в (6.52)). Градиент концентрации  $\nabla C$  возникает под действием градиента температуры благодаря эффекту Соре. Его направление совпадает с направлением вектора  $-\rho \mathcal{D}_T \nabla T$ , см. (6.53). Поэтому направление дополнительного потока тепла в (6.52) совпадает с направлением градиента температуры и противоположно направлению потока тепла под действием теплопроводности. Результирующий поток тепла зависит от физических свойств смеси и конфигурации системы (границых условий). Например, в замкнутой области с непроницаемыми для вещества стенками диффузионный поток массы исчезает в стационарном состоянии при отсутствии конвекции, см. пункт 2.1.1. Если в области поддерживается градиент температуры путем создания соответствующих условий на границе, то из  $\mathcal{J} = 0$  и (6.53) следует  $\nabla C = -\mathcal{D}_T \mathcal{D}^{-1} \nabla T$ . Подставляя это выражение в (6.52), получим  $\mathcal{J}_h = -\kappa \nabla T$ . Таким образом, два противоположно направленных потока тепла, возникающих под действием эффекта Дюфора, полностью компенсируют друг друга. В трубе при наличии вынужденной конвекции диффузионный поток массы не равен нулю всюду. Поэтому вклад эффекта Дюфора в тепломассоперенос может иметь место.

## 6.2 Влияние термофореза наночастиц

### на вынужденную конвекцию наножидкости

#### 6.2.1 Физические свойства наножидкости вода — оксид алюминия

Наножидкости представляют собой двухфазную систему, состоящую из базовой жидкости и наночастиц с характерными размерами от 1 до 100 нм. По классификации дисперсных систем наножидкости относятся к коллоидным растворам [300]. Добавление наночастиц из высокотеплопроводного материала (оксиды металлов, металлы, углеродные нанотрубки) позволяет повысить теплопроводность базовой жидкости. Это открывает перспективы использования наножидкостей в качестве эффективного теплоносителя в системах охлаждения и обогрева [50]. Подробный обзор литературы по данной тематике

был дан в параграфе 1.4. В данном параграфе проводится исследование вынужденной конвекции наножидкости в круглом канале с заданным потоком тепла на стенке. Основной задачей является изучение влияния диффузии и термофореза наночастиц на течение и интенсивность теплообмена на примере наножидкости вода — оксид алюминия ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ). Выбор данной наножидкости обусловлен тем, что ее свойства достаточно хорошо изучены экспериментально [217]. В то же время, вопрос о вкладе диффузии и термофореза наночастиц в эффективную теплоотдачу в настоящее время остается открытым.

Физические свойства наножидкости зависят от свойств базовой жидкости и наночастиц, а также от объемной доли (концентрации) последних. Зависимости плотности, динамической вязкости, теплопроводности и теплоемкости воды от температуры в диапазоне 0–100 °C могут быть описаны путем интерполяции экспериментальных данных [301] полиномами:

$$\begin{aligned}\rho_w &= 999.86 + 6.1238 \cdot 10^{-2} T - 8.3131 \cdot 10^{-3} T^2 + \\ &\quad + 6.4236 \cdot 10^{-5} T^3 - 3.9530 \cdot 10^{-7} T^4 + 1.0808 \cdot 10^{-9} T^5, \\ \mu_w &= 1.7825 \cdot 10^{-3} - 5.8439 \cdot 10^{-5} T + 1.2592 \cdot 10^{-6} T^2 - \\ &\quad - 1.6986 \cdot 10^{-8} T^3 + 1.2480 \cdot 10^{-10} T^4 - 3.7458 \cdot 10^{-13} T^5, \\ \kappa_w &= 0.5609 + 1.9488 \cdot 10^{-3} T - 1.0133 \cdot 10^{-6} T^2 - \\ &\quad - 1.2840 \cdot 10^{-7} T^3 + 6.2118 \cdot 10^{-10} T^4, \\ c_{p,w} &= 4218.79 - 3.1667 T + 9.5040 \cdot 10^{-2} T^2 - \\ &\quad - 1.3890 \cdot 10^{-3} T^3 + 1.0722 \cdot 10^{-5} T^4 - 3.2042 \cdot 10^{-8} T^5,\end{aligned}$$

где  $T$  — температура в цельсиях. В дальнейшем нам также понадобится коэффициент теплового расширения воды, который определяется согласно

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial T}$$

и может быть описан зависимостью

$$\begin{aligned}\beta_T &= -6.3516 \cdot 10^{-5} + 1.6839 \cdot 10^{-5} T - 1.9824 \cdot 10^{-7} T^2 + \\ &\quad + 1.6867 \cdot 10^{-9} T^3 - 5.7744 \cdot 10^{-12} T^4.\end{aligned}$$

Зависимости плотности, теплопроводности и теплоемкости наночастиц оксида алюминия от температуры описываются выражениями [302]:

$$\rho_a = 3921.71 - 8.5625 \cdot 10^{-2} T, \quad 0 \leq T \leq 100 {}^{\circ}\text{C},$$

$$\kappa_a = 5.5 + 34.5 \exp(-0.0033 T), \quad 0 \leq T \leq 1300 {}^{\circ}\text{C},$$

$$c_{p,a} = 1044.60 + 0.1742 (273.15 + T) - \frac{2.796 \cdot 10^7}{(273.15 + T)^2}, \quad T \leq 1500 {}^{\circ}\text{C}.$$

Здесь выражение для плотности основано на линейной модели

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta_T (T - T_0)),$$

где  $\beta_T = 2.1843 \cdot 10^{-5}$  1/K — коэффициент объемного теплового расширения [303],  $T_0 = 20 {}^{\circ}\text{C}$ ,  $\rho_0 = 3920$  кг/м<sup>3</sup>,

Плотность и теплоемкость наножидкости определяются по следующим формулам

$$\rho = C_v \rho_a + (1 - C_v) \rho_w, \quad c_p = \frac{C_v \rho_a c_{p,a} + (1 - C_v) \rho_w c_{p,w}}{\rho}, \quad (6.54)$$

где  $C_v$  — объемная концентрация наночастиц. Для вязкости и теплопроводности наножидкости будем использовать корреляции, основанные на экспериментальных данных для наночастиц оксида алюминия диаметром  $d_a = 46$  нм в воде [304]:

$$\mu = \mu_w \exp\left(\frac{4.91 C_v}{0.2092 - C_v}\right), \quad \kappa = \kappa_w (1 + 4.5503 C_v).$$

Область применимости этих формул  $20 \leq T \leq 80 {}^{\circ}\text{C}$ ,  $0 \leq C_v \leq 0.06$ .

Коэффициент диффузии определяется формулой Эйнштейна–Стокса [219]

$$\mathcal{D} = \frac{k_B T}{3\pi\mu_w d_a},$$

где  $d_a$  — диаметр наночастиц,  $k_B = 1.3807 \times 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана.

Зависимость физических свойств наножидкости от температуры показана на рис. 6.5 для различных объемных концентраций наночастиц. При увеличении концентрации наночастиц плотность, вязкость и теплопроводность наножидкости растут, а теплоемкость — падает. Коэффициент диффузии от концентрации не зависит.

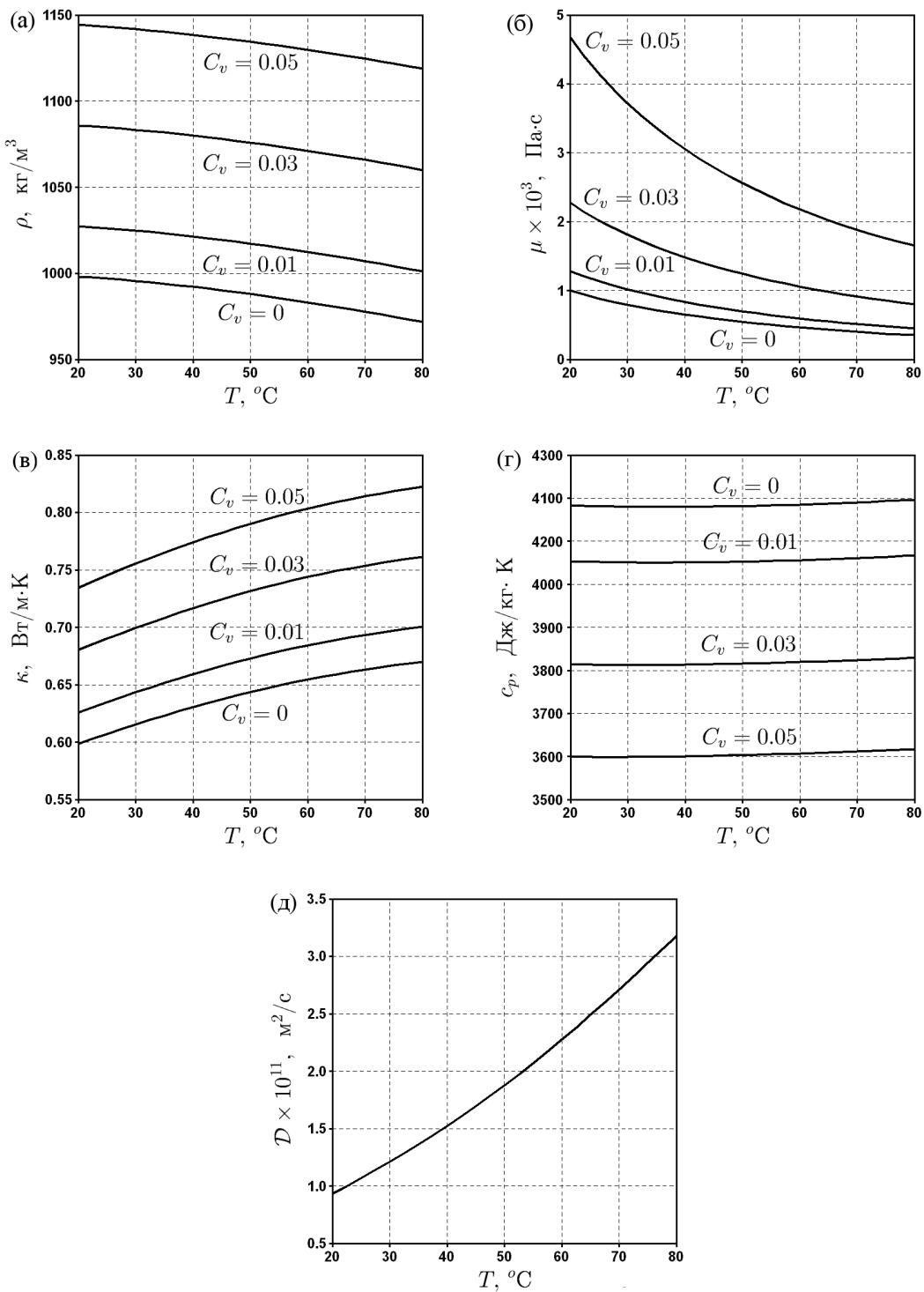


Рис. 6.5. Зависимость физических свойств наножидкости вода — оксид алюминия от температуры для различных объемных концентраций наночастиц  $C_v$ : (а) плотность  $\rho$ ; (б) динамическая вязкость  $\mu$ ; (в) теплопроводность  $\kappa$ ; (г) теплоемкость  $c_p$ ; (д) коэффициент диффузии  $\mathcal{D}$ .

Скорость перемещения наночастиц под действием термофореза дается формулой

$$\mathbf{v}_T = -\mathcal{D}_T \nabla T, \quad (6.55)$$

где  $\mathcal{D}_T$  — термофоретическая мобильность (thermophoretic mobility) [229]. Тогда поток наночастиц (в кг/м<sup>2</sup>с) можно записать в виде

$$\mathcal{J} = -\rho(\mathcal{D}\nabla C_m + \mathcal{D}_T C_m \nabla T), \quad (6.56)$$

где  $C_m$  — массовая концентрация наночастиц, которая связана с объемной концентрацией  $C_v$  соотношением  $\rho C_m = \rho_a C_v$ . Здесь  $\rho$  — плотность наножидкости (см. 6.54),  $\rho_a$  — плотность наночастиц. Из этого соотношения можно получить формулы

$$C_m = \frac{\rho_a C_v}{C_v \rho_a + (1 - C_v) \rho_w}, \quad C_v = \frac{\rho_w C_m}{C_m \rho_w + (1 - C_m) \rho_a}. \quad (6.57)$$

Заметим, что выражение (6.56) аналогично выражению для потока массы (2.1) с коэффициентом термодиффузии в виде (2.2), где при малых концентрациях можно пренебречь множителем  $1 - C_0$ . Коэффициент Соре наножидкости определяется согласно формуле

$$\mathcal{S}_T = \mathcal{D}_T / \mathcal{D}. \quad (6.58)$$

Для взвеси твердых частиц в жидкости в работе [227] было предложено следующее выражение для термофоретической мобильности:

$$\mathcal{D}_T = 0.26 \frac{\kappa_f}{2\kappa_f + \kappa_p} \frac{\mu_f}{\rho_f T}, \quad (6.59)$$

где индексы  $f$  и  $p$  относятся к жидкости и частице соответственно. Указанное выражение было получено путем сопоставления экспериментальных данных для частиц микронного размера в воде и *n*-гексане с формулой, выведенной ранее для взвеси твердых частиц в газе [228] (при этом вместо коэффициента 3/4 был введен коэффициент 0.26). В свою очередь, последняя формула была получена путем решения задачи о медленном стационарном обтекании сферы в среде с заданным градиентом температуры. На границе сферы ставились условия непротекания, непрерывности температуры и теплового потока.

Предполагалось, что касательная компонента скорости пропорциональна градиенту температуры.

Формула (6.59) использовалась для моделирования термофореза в наножидкостях в ряде работ [50, 53, 234, 305, 306]. Согласно этой формуле, скорость частиц под действием термофореза прямо пропорциональна вязкости базовой жидкости. Тогда коэффициент Соре (6.58) пропорционален квадрату вязкости и, в силу зависимости вязкости жидкостей от температуры, быстро убывает с ростом последней (см. рис. 6.6 (б) ниже). Этот результат противоречит экспериментальным данным для коллоидных растворов [229, 230, 307, 308], согласно которым наблюдается значительный рост коэффициента Соре с увеличением температуры. Теоретические результаты [230], а также моделирование методом молекулярной динамики [231] свидетельствуют о том, что в коллоидных растворах термофоретическая скорость обратно пропорциональна вязкости. В этом случае коэффициент Соре от вязкости не зависит. Заметим, что он является коэффициентом пропорциональности между градиентом температуры и градиентом концентрации в стационарном состоянии при отсутствии конвекции, см. (2.5). Поэтому его независимость от гидродинамических характеристик (вязкости) является естественной [307].

Механизмы, приводящие к перемещению частиц в коллоидных растворах под действием градиента температуры, достаточно сложны и зависят от свойств растворителя и твердых частиц, а также от добавок, обеспечивающих стабилизацию коллоидного раствора (предотвращение агрегации частиц). Приведем краткое описание основных механизмов согласно обзору [230].

1. *Термоосмос в двойном электрическом слое.* В коллоидных растворах на поверхности твердых частиц образуется слой ионов. Это происходит в результате адсорбции ионов из раствора, диссоциации поверхностного соединения или ориентирования полярных молекул на границе фаз. Ионы, непосредственно связанные с поверхностью, называются потенциалоопределяющими. Заряд этого слоя компенсируется зарядом второго слоя ионов, называемых противоионами. Градиент температуры в двойном электрическом слое при-

водит к неоднородному распределению ионов, что, в свою очередь, вызывает градиент давления, направленный противоположно градиенту температуры. В результате вдоль поверхности частицы возникает движение растворителя в направлении более высокой температуры. Частицы при этом движутся в противоположном направлении.

2. *Термоэлектрический эффект*. В растворах электролитов градиент температуры приводит к пространственной неоднородности распределения ионов. В результате возникает электрическое поле, под действием которого частицы могут перемещаться как в направлении более низкой, так и более высокой температуры.

3. *Дисперсионные силы притяжения*. При неоднородной температуре в растворе возникает градиент плотности. В связи с этим элемент объема жидкости с более низкой температурой испытывает большую силу притяжения к твердой частице, чем аналогичный элемент с более высокой температурой. В результате возникает движение растворителя вдоль поверхности частицы в направлении более высокой температуры. Частицы при этом движутся в противоположном направлении.

4. *Термодиффузия*. Если размеры твердых частиц сравнимы с размерами молекул растворителя, то в такой системе имеет место термодиффузия. В отличие от описанных выше случаев, направление перемещения частицы определяется не только ее взаимодействием с молекулами растворителя, но и межмолекулярными силами в растворителе в условиях неоднородного поля температур.

В случаях 1–3 выражение для коэффициента  $D_T$  в формуле (6.55) получается из баланса силы взаимодействия между частицей и окружающей жидкостью и силы вязкого трения в пограничном слое (вблизи поверхности частицы). В случае термодиффузии коэффициент  $D_T$  может быть охарактеризован на основе различных теоретических моделей. В рамках одной из них  $D_T$  пропорционален разности энталпий компонентов (теплоте переноса) [230]. В реальных наножидкостях скорость термофореза определяется совокупным

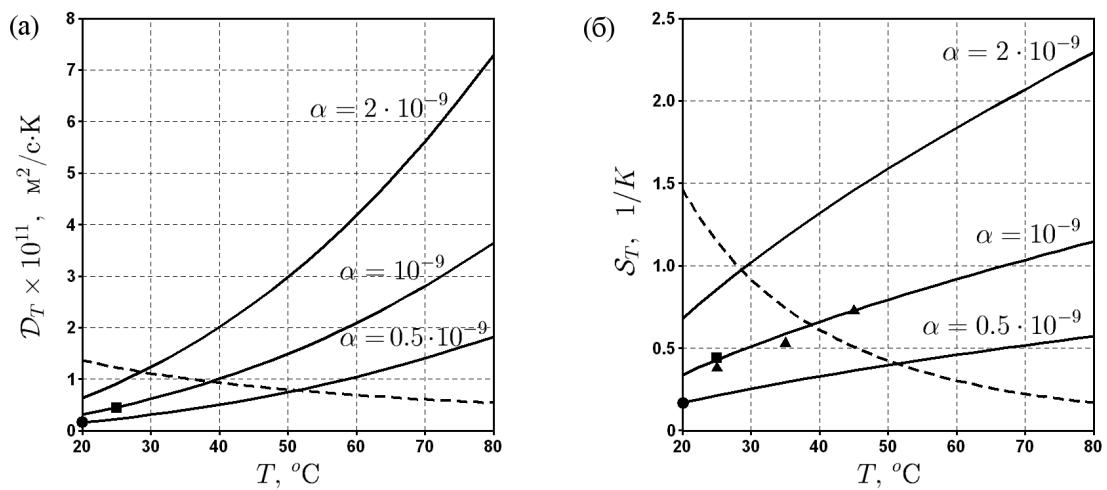


Рис. 6.6. Зависимость термофоретической мобильности  $\mathcal{D}_T$  (а) и коэффициента Соре  $S_T$  (б) от температуры для различных значений параметра  $\alpha$ . Сплошные линии — формула (6.60), штриховая линия — формула (6.59) для  $\mathcal{D}_T$ . Экспериментальные данные:  
● —  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  ( $d_p = 9.6$  нм) в циклогексане [310], ■ —  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  ( $d_p = 10$  нм) в воде [311],  
▲ — полистирол ( $d_p = 106$  нм) в воде [308].

действием описанных выше механизмов. В связи с этим невозможно предложить общую формулу для коэффициента  $\mathcal{D}_T$ , которая будет пригодна для всех наножидкостей. Для конкретных систем этот коэффициент может быть определен экспериментально. В то же время, анализ имеющихся экспериментальных данных и теоретических результатов для широкого круга коллоидных систем позволяет выделить некоторые общие закономерности поведения коэффициента  $\mathcal{D}_T$ . Итак, этот коэффициент:

1. Не зависит от размера частиц [308].
2. Обратно пропорционален вязкости растворителя  $\mu_f$  [230, 231].
3. Прямо пропорционален коэффициенту теплового расширения растворителя  $\beta_T$  [307].
4. Прямо пропорционален выражению  $3\kappa_f(2\kappa_f + \kappa_p)^{-1}$  [230, 309].

Коэффициент пропорциональности в последнем случае связан с изменением градиента температуры вблизи поверхности частицы за счет отличия ее теплопроводности  $\kappa_p$  от теплопроводности растворителя  $\kappa_f$ .

На основе этих результатов можно написать следующее выражение для

термофоретической мобильности:

$$\mathcal{D}_T = \alpha \frac{\beta_T}{\mu_f} \frac{\kappa_f}{2\kappa_f + \kappa_p}, \quad (6.60)$$

где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности, который выбирается таким образом, чтобы порядок численных значений  $\mathcal{D}_T$  соответствовал экспериментальным данным.

Зависимость термофоретической мобильности и коэффициента Соре от температуры показана на рис. 6.6. Эти величины рассчитывались на основе формулы (6.60) при  $\alpha = 0.5 \cdot 10^{-9}$ ,  $10^{-9}$ ,  $2 \cdot 10^{-9}$ , а также формулы (6.59). Кривые, соответствующие формуле (6.60), верно отражают тенденцию увеличения коэффициента Соре с ростом температуры, при этом порядок значений  $S_T$  соответствует экспериментальным данным для коллоидных систем на основе воды [307, 308], а также органических и водных растворов наночастиц оксидов железа [310, 311]. Зависимость  $S_T$  от температуры, соответствующая формуле (6.59) для  $\mathcal{D}_T$ , показывает уменьшение коэффициента Соре с ростом температуры, что противоречит экспериментальным результатам.

Экспериментальные данные по термофоретической мобильности для наножидкости вода — оксид алюминия в настоящее время отсутствуют. В связи с этим в дальнейших расчетах будет использоваться формула (6.60) при  $\alpha = 10^{-9}$ ,  $\mu_f = \mu_w$ ,  $\kappa_f = \kappa_w$ ,  $\kappa_p = \kappa_a$ . Для понимания того, как интенсивность термофореза влияет на процессы тепломассообмена, часть расчетов будет выполнена для  $\alpha = 0.5 \cdot 10^{-9}$  и  $\alpha = 2 \cdot 10^{-9}$ .

### 6.2.2 Постановка задачи о вынужденной конвекции в трубе

Рассмотрим задачу о вынужденной конвекции наножидкости в круглой цилиндрической трубе радиуса  $R$  (рис. 6.7). Предполагается, что течение является ламинарным и осесимметричным. Наножидкость поступает в трубу при  $z = 0$  с температурой  $T_0$  и объемной концентрацией наночастиц  $C_{v0}$ . Профиль осевой скорости на входе является параболическим

$$v(r) = 2v_0 \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right), \quad (6.61)$$

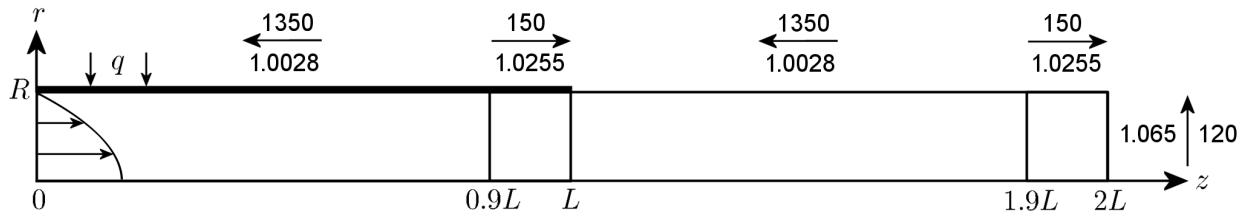


Рис. 6.7. Геометрия трубы и схема расчетной сетки ( $R = 0.001$  м,  $L = 1$  м). Стрелки указывают направления сгущения, число над стрелкой (или справа) – количество ячеек, число под стрелкой (или слева) – коэффициент сгущения (отношение соответствующих размеров соседних ячеек).

где  $v_0$  — средняя по сечению скорость наножидкости. На стенке при  $0 \leq z \leq L$  задан постоянный поток тепла  $q > 0$ , а при  $L < z \leq 2L$  труба является теплоизолированной. В расчетах используются следующие значения параметров:  $R = 0.001$  м,  $L = 1$  м,  $q = 20000$  Вт/м<sup>2</sup>,  $T_0 = 20$  °C.

Для описания наножидкости будем использовать обобщение двухкомпонентной модели, предложенной в работе [53], на случай переменных физических свойств. Эта модель рассматривает наножидкость как бинарную смесь базовой жидкости и наночастиц, концентрация которых является переменной величиной. В расчетах удобно использовать массовую концентрацию наночастиц  $C_m$ . Уравнения импульса, неразрывности, переноса тепла и наночастиц с учетом переменных физических свойств имеют вид

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \Pi, \quad (6.62)$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (6.63)$$

$$\partial_t (\rho H) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} H) = \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (6.64)$$

$$\partial_t (\rho C_m) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} C_m) = \nabla \cdot (\rho \mathcal{D} \nabla C_m + \rho \mathcal{D}_T C_m \nabla T), \quad (6.65)$$

$$\Pi = \mu \left( \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} E \right), \quad H = \int_{T_0}^T c_p dT.$$

Здесь  $\Pi$  — тензор вязких напряжений,  $E$  — единичный тензор,  $\mathbf{u}$  и  $\nabla \mathbf{u}$  — диадные произведения,  $H$  — энталпия. В силу слабой зависимости теплоемкости наножидкости от температуры (см. рис. 6.5 (г)) в расчетах предполагалось, что  $c_p$  является константой и соответствует температуре  $T_0$  на входе в трубу.

В этом случае формулу для расчета энталпии можно записать следующим образом

$$H = c_p(T_0, C_v)(T - T_0). \quad (6.66)$$

В дальнейшем будем рассматривать стационарные уравнения (6.62)–(6.65) в цилиндрических координатах  $(r, z)$  с учетом осевой симметрии. Вектор скорости имеет вид  $\mathbf{u} = (u, v)$ , где  $u$  — радиальная скорость,  $v$  — осевая скорость. Уравнения движения переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v u) &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( r \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) - \\ &\quad - 2\mu \frac{u}{r^2} + \frac{2\mu}{3r} \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \frac{v^2}{r}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v v) &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \right), \\ \frac{\partial}{\partial r} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v) + \frac{\rho u}{r} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u c_p T) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v c_p T) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u C_m) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v C_m) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho \mathcal{D} \frac{\partial C_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \mathcal{D} \frac{\partial C_m}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho \mathcal{D}_T C_m \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \mathcal{D}_T C_m \frac{\partial T}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (6.67)$$

где  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial u / \partial r + u / r + \partial v / \partial z$ .

Границные условия имеют вид

$$r = 0 : \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial C_m}{\partial r} = 0, \quad (6.68)$$

$$r = R : \quad u = v = 0, \quad \kappa \frac{\partial T}{\partial r} = \begin{cases} q, & 0 \leq z \leq L, \\ 0, & L < z \leq 2L, \end{cases}$$

$$\mathcal{D} \frac{\partial C_m}{\partial r} + \mathcal{D}_T C_m \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (6.69)$$

$$z = 0 : \quad u = 0, \quad v = v(r), \quad T = T_0, \quad C_m = C_{m0}, \quad (6.70)$$

$$z = 2L : \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial C_m}{\partial z} = 0. \quad (6.71)$$

Профиль скорости  $v(r)$  дается формулой (6.61). Значение массовой концентрации на входе  $C_{m0}$  определяется по значению объемной концентрации  $C_{v0}$  с помощью первой формулы в (6.57). Условия (6.68) выражают свойство осевой симметрии задачи, а условия (6.71) соответствуют установившемуся режиму течения на выходе из трубы.

Наряду с двухкомпонентной моделью, для описания наножидкости будем также использовать однокомпонентную модель, в которой предполагается, что объемная концентрация наночастиц является постоянной величиной. Физические свойства наножидкости соответствуют концентрации наночастиц на входе в трубу, а уравнение переноса наночастиц (6.65) и граничные условия к нему исключаются из рассмотрения. Такую модель также называют моделью однородной наножидкости [53]. Сравнительный анализ результатов для однокомпонентной и двухкомпонентной моделей будет приведен ниже.

Для численного решения задачи использовался пакет ANSYS FLUENT 14.5. Схема и параметры расчетной сетки представлены на рис. 6.7. Сетка сгущена по направлению к стенке трубы  $r = R$  для того, чтобы обеспечить корректный расчет тепловых и концентрационных пограничных слоев. Кроме этого, сетка имеет сгущения в направлении входа  $z = 0$  и выхода  $z = 2L$  из трубы, а также вблизи сечения  $z = L$ , где тепловой поток на стенке испытывает скачок. Выбор количества узлов и коэффициентов сгущения осуществлялся путем сопоставления численного решения задачи с точным решением для случая постоянных физических свойств (см. пункт 6.2.3 ниже). Стационарная задача решалась итерационным способом на основе алгоритма SIMPLEC (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations – Consistent). Использовалась аппроксимация второго порядка точности. Для сходимости требовалось около 6000 итераций. Необходимость большого количества итераций связана с переменностью физических свойств среды, а также с соотношением размеров

трубы ( $2L/R = 2000$ ).

Интенсивность теплообмена в трубе характеризуется *коэффициентом теплоотдачи*, который определяется по формуле

$$h = \frac{q}{T(R, z) - T_b(z)}, \quad (6.72)$$

где  $q$  — поток тепла на стенке,  $T(R, z)$  — температура стенки,  $T_b(z)$  — среднемассовая температура по сечению. Средний коэффициент теплоотдачи определяется путем осреднения  $h$  по поверхности обогреваемого участка трубы:

$$\bar{h} = \frac{1}{2\pi RL} \int_0^L \int_0^{2\pi} h R d\varphi dz.$$

Среднемассовая температура по сечению  $T_b(z)$  может быть вычислена по среднемассовой энталпии  $H_b$ :

$$H_b = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R H \rho v r dr d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^R \rho v r dr d\varphi}, \quad H_b = c_p(T_0, C_{vb})(T_b - T_0), \quad (6.73)$$

где  $H$  дается формулой (6.66), а  $C_{vb}$  — средняя по сечению объемная концентрация, определяемая согласно

$$C_{vb} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R C_v v r dr d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^R v r dr d\varphi}.$$

Для оценки среднемассовой температуры можно также использовать простую формулу, справедливую для случая постоянных физических свойств [1]:

$$T_b(z) = T_0 + \frac{2q}{R v_0 \rho c_p} z, \quad (6.74)$$

где плотность  $\rho$  и теплоемкость  $c_p$  соответствуют температуре на входе в трубу.

Основными безразмерными параметрами, характеризующими подобие гидродинамического, теплового и диффузационного режимов в трубе, являются число Рейнольдса, тепловое число Пекле и концентрационное число Пекле

соответственно:

$$\text{Re} = \frac{\rho v_0 2R}{\mu}, \quad \text{Pe} = \frac{\rho c_p v_0 2R}{\kappa}, \quad \text{Pe}_c = \frac{v_0 2R}{\mathcal{D}}.$$

Эти числа пропорциональны средней скорости  $v_0$ . Теплообмен в трубе характеризуется числом Нуссельта и его осредненным значением по поверхности обогреваемого участка трубы:

$$\text{Nu} = \frac{h 2R}{\kappa}, \quad \overline{\text{Nu}} = \frac{1}{2\pi RL} \int_0^L \int_0^{2\pi} \text{Nu} R d\varphi dz. \quad (6.75)$$

В случае постоянных физических свойств жидкости локальное число Нуссельта является функцией безразмерной координаты  $\zeta = z(2R \text{Pe})^{-1}$ . Хорошее приближение к выражению для Nu, полученному из точного решения задачи Греца (6.23), (6.25), дает следующая корреляция [1]:

$$\text{Nu} = \begin{cases} 1.302 \zeta^{-1/3} - 1, & \zeta < 0.00005, \\ 1.302 \zeta^{-1/3} - 0.5, & 0.00005 < \zeta < 0.0015, \\ 4.364 + 0.263 \zeta^{-0.506} e^{-41\zeta}, & \zeta > 0.0015. \end{cases} \quad (6.76)$$

При исследовании интенсивности теплообмена в трубе представляет интерес зависимость коэффициента теплоотдачи и числа Нуссельта от теплового числа Пекле для различных концентраций наночастиц. Заметим, что скорость  $v_0$  не может быть слишком малой, так как в этом случае температура на выходе из трубы может превысить температуру кипения наножидкости (в случае чистой воды при нормальном давлении эта температура составляет  $100^\circ\text{C}$ ). С другой стороны, скорость движения жидкости не может быть слишком большой, так как при превышении числом Рейнольдса критического значения  $\text{Re} = 2300$  ламинарное течение переходит в турбулентное и больше не является осесимметричным. Необходимо также учитывать, что зависимость физических свойств от температуры приводит к значительному изменению числа Рейнольдса и теплового числа Пекле вдоль трубы при заданном значении скорости  $v_0$ . В частности, падение вязкости с ростом температуры (рис. 6.5 (б)) вызывает увеличение числа Рейнольдса вниз по течению при наличии постоянного потока тепла на стенке. Из этих соображений можно заключить,

Таблица 6.1. Список расчетных случаев с указанием значений числа Рейнольдса  $Re$  и средней скорости  $v_0$  (м/с) в зависимости от теплового числа Пекле  $Pe$  на входе в трубу.

	$C_{v0} = 0$		$C_{v0} = 0.01$		$C_{v0} = 0.03$		$C_{v0} = 0.05$	
$Pe$	$Re$	$v_0$	$Re$	$v_0$	$Re$	$v_0$	$Re$	$v_0$
1500							65	0.1338
1750					137	0.1437	76	0.1561
2000	286	0.1433	241	0.1503	157	0.1642	87	0.1784
2500	358	0.1791	302	0.1878	196	0.2053	109	0.2230
3000	429	0.2150	362	0.2254	235	0.2464	131	0.2676
4000	572	0.2866	482	0.3005	313	0.3285	175	0.3568
6000	858	0.4299	724	0.4508	470	0.4927	262	0.5352
8000	1144	0.5733	965	0.6010	627	0.6570	349	0.7136
10000	1430	0.7166	1206	0.7513	784	0.8212	437	0.8919
12000	1716	0.8599	1447	0.9015	940	0.9854	524	1.0703
14000			1689	1.0518	1097	1.1497	611	1.2487
16000			1930	1.2020	1254	1.3139	699	1.4271
18000					1411	1.4782	786	1.6055
20000					1567	1.6424	873	1.7839

что ламинарное течение наножидкости в трубе может быть физически реализовано лишь в некотором диапазоне чисел Пекле (Рейнольдса). В Таблице 6.1 приведен список расчетных случаев для различных концентраций наночастиц. Значения чисел Пекле и Рейнольдса соответствуют температуре и концентрации наночастиц на входе в трубу.

### 6.2.3 Влияние термофореза наночастиц на течение и теплообмен в трубе

Исследуем основные закономерности течения и теплообмена наножидкости в трубе для случая  $C_{v0} = 0.05$ ,  $Pe = 2500$ . Представляет интерес анализ численного решения, а также сравнение этого решения с точным решением,

Таблица 6.2. Физические свойства наножидкости вода — оксид алюминия при объемной концентрации наночастиц  $C_v = 0.05$  и температуре  $T = 41.78^\circ\text{C}$ .

$\rho$ кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ Дж/кг·К	$\kappa$ Вт/м·К	$\mu \times 10^3$ Па·с	$\mathcal{D} \times 10^{11}$ м <sup>2</sup> /с	$\mathcal{D}_T \times 10^{11}$ м <sup>2</sup> /с·К
1138	3601	0.777	2.958	1.585	1.085

построенным в пункте 6.1.3 для случая постоянных физических свойств.

Для построения точного решения возьмем свойства наножидкости вода — оксид алюминия при концентрации наночастиц  $C_v = 0.05$  и средней температуре в трубе. Используя формулу (6.74), найдем среднемассовую температуру на выходе из обогреваемой секции  $T_b(L) = 63.56^\circ\text{C}$ . Тогда средняя температура в этой секции может быть оценена как  $T_0 + (T_b(L) - T_0)/2 = 41.78^\circ\text{C}$ . Физические свойства наножидкости при данной температуре приведены в Таблице 6.2. На основе этих данных и средней скорости на входе  $v_0 = 0.2230$  м/с (см. Таблицу 6.1) вычислим число Рейнольдса  $\text{Re} = 172$ , тепловое число Пекле  $\text{Pe} = 2351$  и концентрационное число Пекле  $\text{Pe}_c = 28\,137\,689$ . Заметим, что эти значения отличаются от значений, соответствующих температуре на входе в трубу.

Для ламинарного течения наножидкости с параболическим профилем скорости и постоянными физическими свойствами два последних уравнения в (6.67) и граничные условия (6.68)–(6.70) с учетом соотношения  $\rho C_m = \rho_a C_v$  сводятся к задаче (6.23)–(6.26), где следует положить  $n = 2$ ,  $V(r) = v(r)$ ,  $C'_i = C_v$ ,  $C'_{i0} = C_{v0}$ ,  $D_i = \mathcal{D}$ ,  $D'_{Ti} = \mathcal{D}_T C_{v0}$ . Расчет полей температуры и объемной концентрации по формулам (6.16)–(6.18), (6.27), (6.51) проводился в системе Maple 16. При больших числах Пекле собственные значения  $\lambda_j^+ \rightarrow \infty$ , откуда следует  $T = T_0$ ,  $C_v = C_{v0}$  при  $z \leq 0$ . Кроме этого, при большом значении концентрационного числа Пекле можно ожидать, что изменения концентрации будут происходить в тонком пограничном слое вблизи стенки. Анализ показывает, что количество членов ряда  $N_\theta = 100$  в формулах для температуры и  $N_c = 1000$  в формулах для концентрации достаточно для корректного

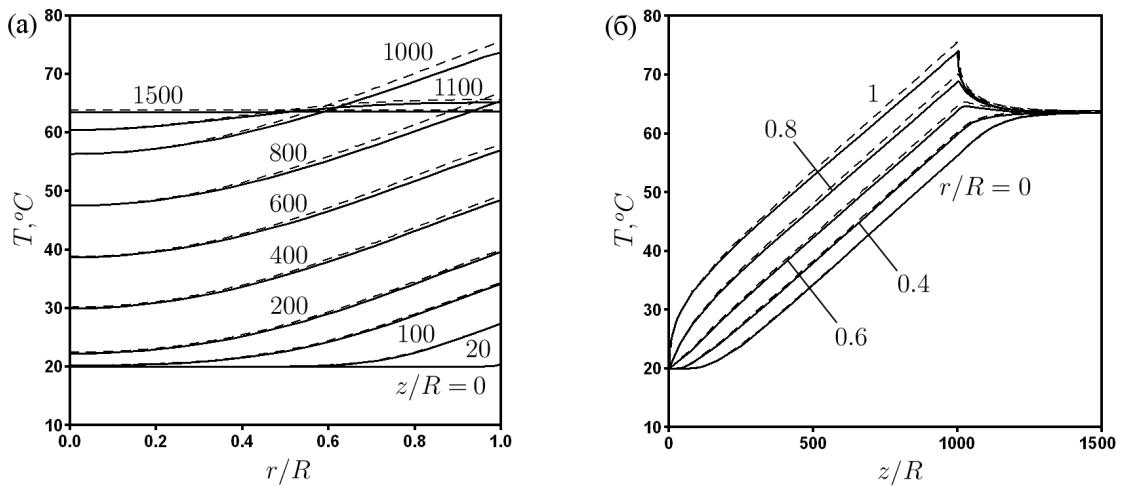


Рис. 6.8. Профили температуры в сечениях трубы, соответствующих постоянным значениям осевой (а) и радиальной (б) координат при  $\text{Pe} = 2500$ . Сплошные линии — численный расчет для переменных физических свойств, штриховые линии — точное решение для постоянных физических свойств ( $\text{Pe} = 2351$ ,  $\text{Pe}_c = 28\,137\,689$ ).

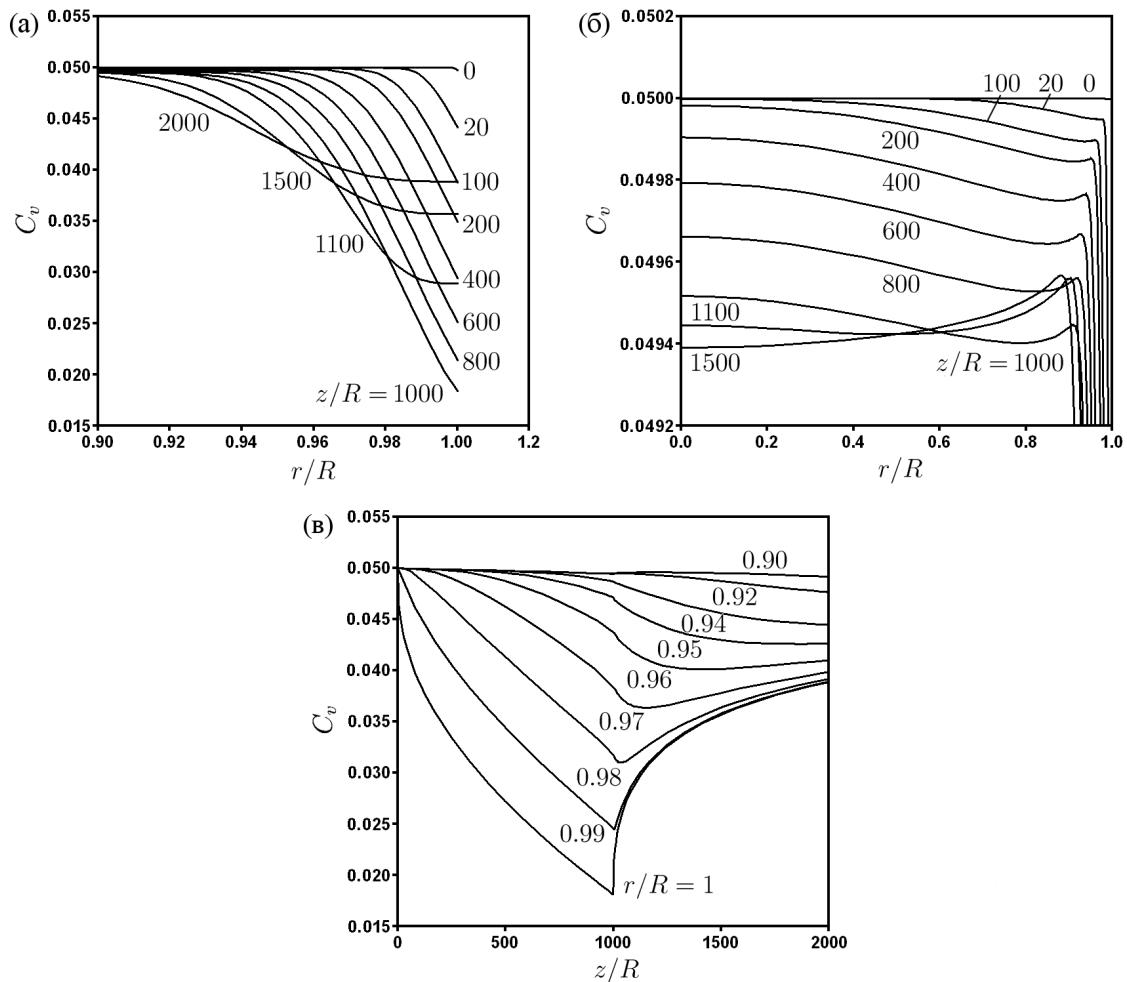


Рис. 6.9. Профили объемной концентрации в сечениях трубы, соответствующих постоянным значениям осевой (а, б) и радиальной (в) координат при  $\text{Pe} = 2500$  (численный расчет).

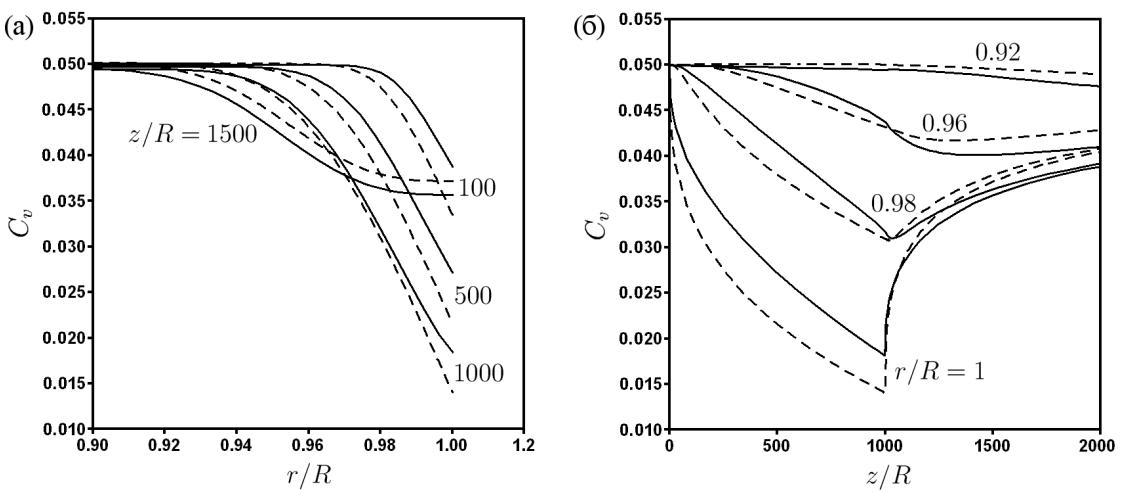


Рис. 6.10. Профили объемной концентрации в сечениях трубы, соответствующих постоянным значениям осевой (а) и радиальной (б) координат при  $\text{Pe} = 2500$ . Сплошные линии — численный расчет для переменных физических свойств, штриховые линии — точное решение для постоянных физических свойств ( $\text{Pe} = 2351$ ,  $\text{Pe}_c = 28\,137\,689$ ).

расчета решения как в пограничном слое, так и в остальной части трубы.

Профили температуры в сечениях трубы, соответствующих постоянным значениям осевой и радиальной координат, показаны на рис. 6.8. Температура растет вдоль канала. После прохождения обогреваемой секции неоднородности температуры в радиальном направлении сглаживаются, и она принимает постоянное значение. Градиенты температуры в обогреваемой секции приводят к возникновению градиентов концентрации наночастиц под действием термофореза (рис. 6.9). Наночастицы перемещаются из области больших в область меньших температур (то есть от стенки к центру трубы). Так как концентрационное число Пекле очень большое, то существенные изменения концентрации имеют место лишь в тонком пограничном слое (рис. 6.9 (а), (в)), в то время как в остальной части трубы концентрация меняется слабо (рис. 6.9 (б)). Заметим, что небольшое понижение объемной концентрации, показанное на последнем рисунке, связано с уменьшением плотности (и соответственным увеличением удельного объема) при повышении температуры в направлении течения. Наибольшее изменение концентрации достигается вблизи стенки на выходе из обогреваемой секции, где она уменьшается на 72 % по сравнению со значением на входе  $C_{v0} = 0.05$ . После прохождения обогреваемой секции

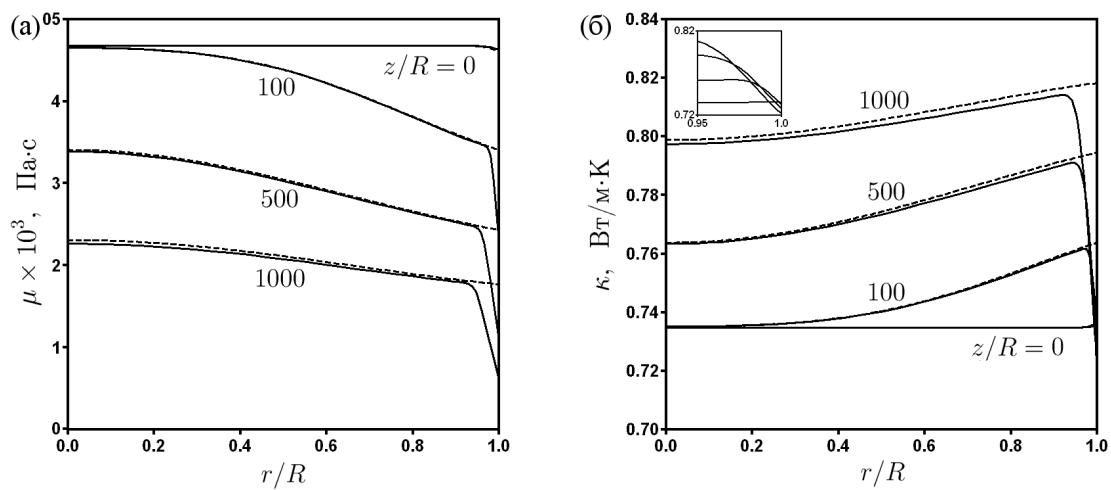


Рис. 6.11. Профили динамической вязкости (а) и теплопроводности (б) в сечениях трубы при постоянных значениях осевой координаты,  $\text{Pe} = 2500$ . Расчет на основе двухкомпонентной модели (сплошные линии) и однокомпонентной модели (штриховые линии).

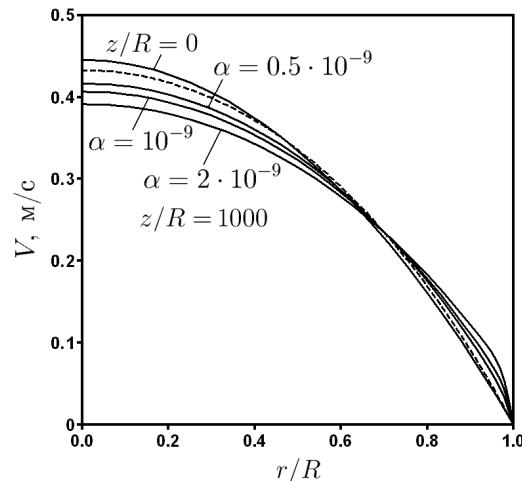


Рис. 6.12. Профили осевой скорости на входе в трубу ( $z/R=0$ ) и на выходе из обогреваемого участка ( $z/R = 1000$ ) для однокомпонентной модели (штриховая линия) и двухкомпонентной модели (сплошные линии) при различных значениях параметра  $\alpha$ , характеризующего интенсивность термофореза.

неоднородности концентрации выравниваются под действием диффузии. Заметим, что условие равенства нулю производной от концентрации в направлении течения на выходе из трубы (см. (6.71)) не оказывает влияния на распределение концентрации внутри трубы (рис. 6.9 (в)) в силу интенсивного конвективного потока в осевом направлении.

Увеличение температуры в направлении течения, а также в направлении

от центра к стенке трубы вызывает снижение вязкости и увеличение теплопроводности (рис. 6.11). Кроме этого, резкое понижение концентрации наночастиц в пограничном слое приводит к соответствующему понижению вязкости и теплопроводности. Этот эффект может быть описан только в рамках двухкомпонентной модели. Снижение вязкости вблизи стенки приводит к изменению профиля скорости (рис. 6.12). Скорость вблизи стенки увеличивается, а в центральной части трубы — уменьшается. Этот эффект усиливается с ростом параметра  $\alpha$ , характеризующего интенсивность термофореза.

Изменение физических свойств наножидкости при изменении температуры и концентрации не учитывается в точном решении. Это обуславливает его отличие от численных результатов. В частности, температура в численном решении немного меньше, чем в точном. Различие температур нарастает в направлении от центра трубы к стенке, а также в направлении течения. Этот эффект связан с ростом теплопроводности при повышении температуры, а также с увеличением скорости вблизи стенки, см. рис. 6.12. Последнее также приводит к тому, что изменение концентрации вблизи стенки в обогреваемой секции в численном решении меньше, чем в точном (рис. 6.10). Дополнительным фактором здесь является зависимость коэффициента при градиенте температуры от концентрации в выражении для потока наночастиц (6.56) (с уменьшением концентрации поток наночастиц под действием термофореза уменьшается).

#### 6.2.4 Интенсивность теплообмена в трубе

Зависимость коэффициента теплоотдачи от расстояния вдоль оси трубы для различных концентраций наночастиц на входе в трубу показана на рис. 6.13. Увеличение концентрации приводит к росту коэффициента теплоотдачи. Во всех случаях после резкого падения коэффициента теплоотдачи на начальном участке трубы наблюдается его рост с увеличением расстояния от входа. Этот эффект связан с уменьшением вязкости и увеличением теплопроводности в направлении течения. Расчеты на основе двухкомпонентной модели дают большее значение коэффициента теплоотдачи по сравнению с одно-

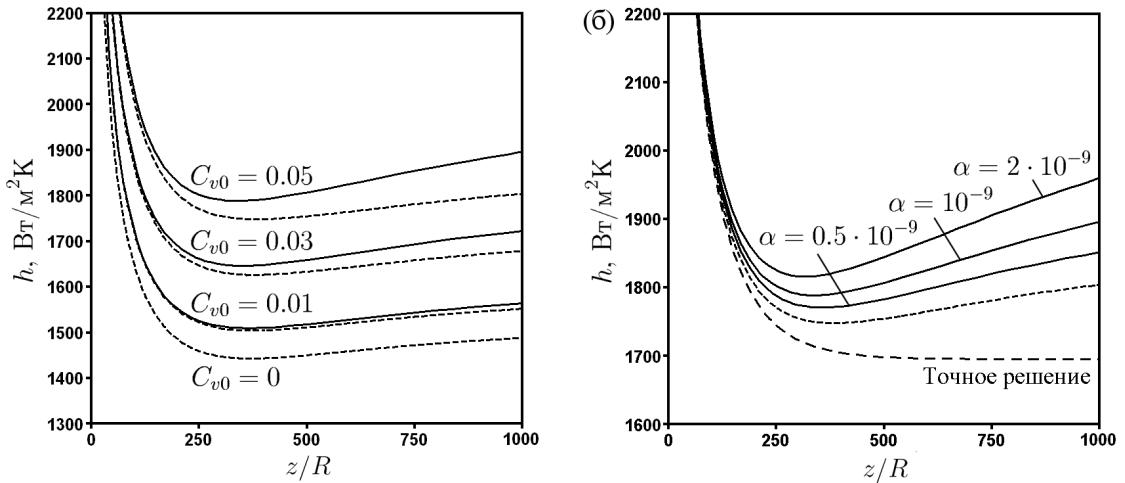


Рис. 6.13. Зависимость коэффициента теплоотдачи от расстояния вдоль оси трубы для различных объемных концентраций наночастиц при  $\alpha = 10^{-9}$  (а) и для различных значений  $\alpha$  при  $C_{v0} = 0.05$  (б),  $Re = 2500$ . Расчет на основе двухкомпонентной модели (сплошные линии), однокомпонентной модели (штриховые линии).

компонентной моделью. Это связано с увеличением скорости вблизи стенки за счет уменьшения вязкости, которое вызвано падением концентрации наночастиц в пограничном слое за счет термофореза. С увеличением интенсивности последнего коэффициент теплоотдачи возрастает, см. рис. 6.13. На данном рисунке также показан коэффициент теплоотдачи на основе точного решения, соответствующего постоянным физическим свойствам. Это решение дает заниженные значения коэффициента теплоотдачи.

На рис. 6.14 приведена зависимость среднего коэффициента теплоотдачи от теплового числа Пекле для различных объемных концентраций наночастиц на входе в трубу. Точки соответствуют расчетным случаям, список которых приведен в Таблице 6.2. С увеличением числа Пекле и концентрации наночастиц наблюдается рост среднего коэффициента теплоотдачи. Значения, рассчитанные на основе однокомпонентной и двухкомпонентной моделей, достаточно близки. Учет термофореза дает большие значения коэффициента теплоотдачи. Разность между результатами, соответствующими двум рассматриваемым моделям, растет с увеличением концентрации наночастиц, а также с увеличением интенсивности термофореза (рис. 6.14 (б)). В случае  $C_{v0} = 0.05$  увеличение среднего коэффициента теплоотдачи под действием термофореза

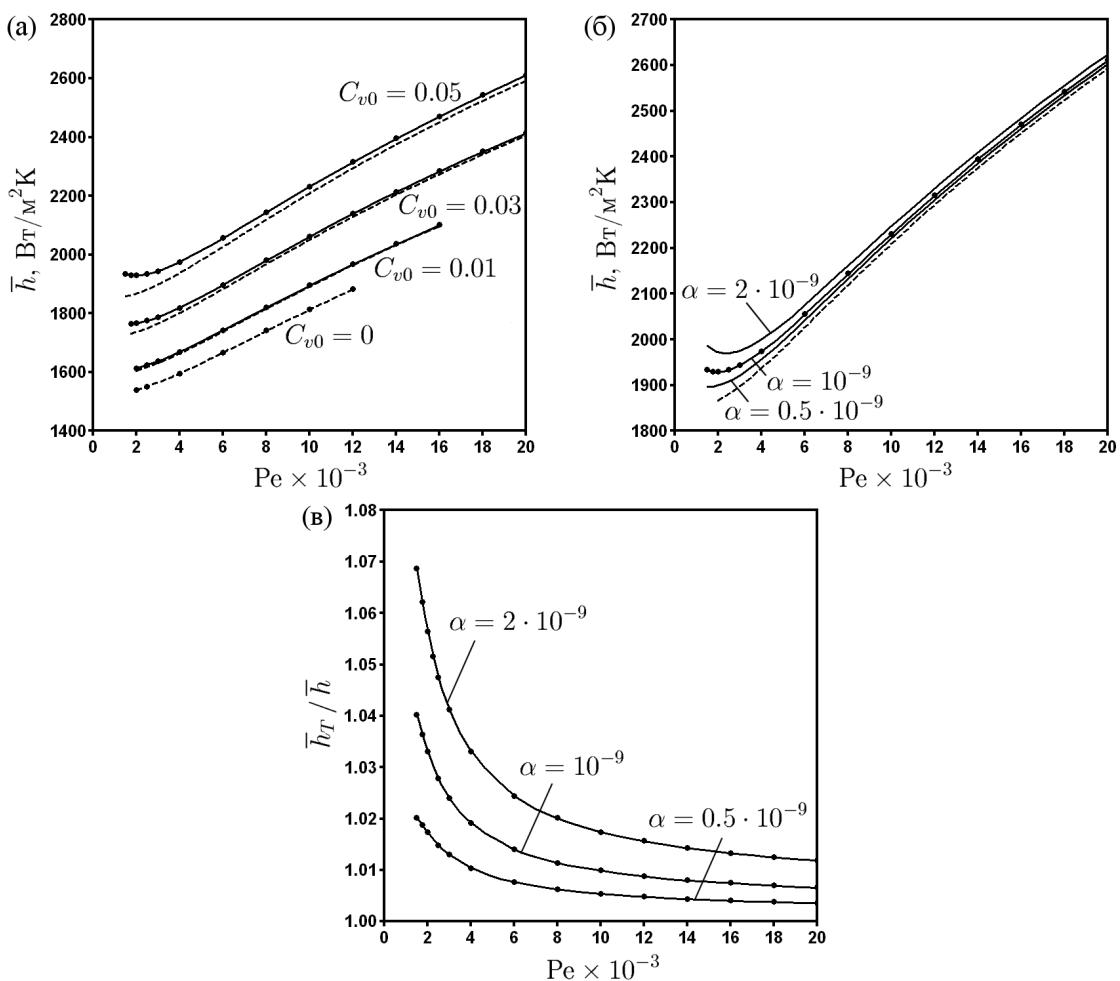


Рис. 6.14. Зависимость среднего коэффициента теплоотдачи от теплового числа Пекле для различных объемных концентраций наночастиц (а) и для различных значений параметра  $\alpha$  при  $C_{v0} = 0.05$  (б). Расчет на основе двухкомпонентной модели (сплошные линии) и однокомпонентной модели (штриховые линии). Отношение средних коэффициентов теплоотдачи, рассчитанных на основе двухкомпонентной ( $\bar{h}_T$ ) и однокомпонентной ( $\bar{h}$ ) моделей (в) при  $C_{v0} = 0.05$ .

составляет 0.4–1.2 % при больших числах Пекле и 2–7 % при малых числах Пекле в зависимости от значений параметра  $\alpha$  (рис. 6.14 (в)). В последнем случае разность температур между входом в обогреваемую секцию и выходом из нее достаточно большая. Это приводит к значительному изменению физических свойств наножидкости в осевом и радиальном направлениях трубы. В области малых чисел Пекле термофорез приводит к интересному эффекту: с ростом числа Пекле средний коэффициент теплоотдачи сначала уменьшается, а потом увеличивается. Заметим, что значения коэффициента теплоотдачи (6.72), рассчитанные по среднемассовой температуре из соотношения (6.73) и

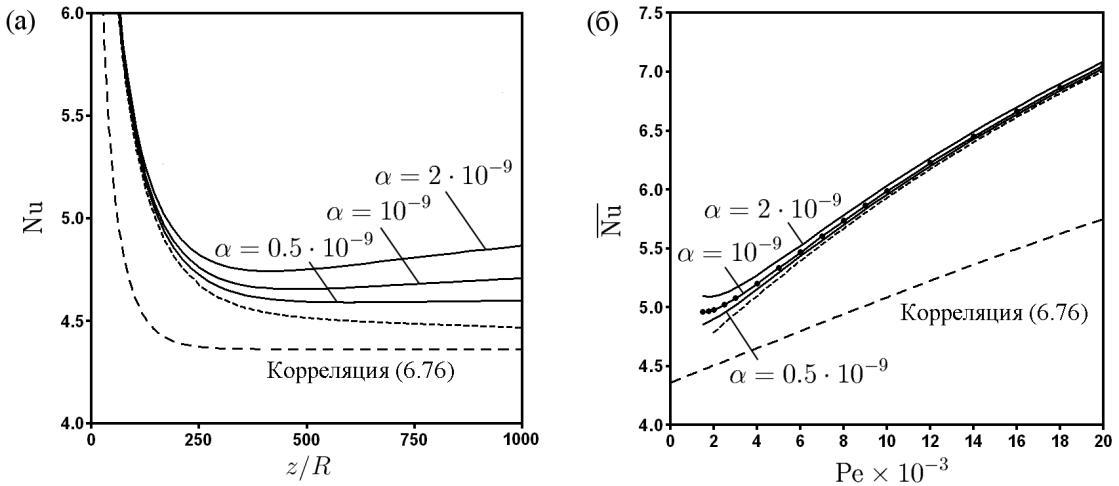


Рис. 6.15. Зависимость числа Нуссельта от расстояния вдоль оси трубы для  $Pe = 2500$  (а) и зависимость среднего числа Нуссельта от теплового числа Пекле (б),  $C_{v0} = 0.05$ . Расчет на основе двухкомпонентной модели (сплошные линии) и однокомпонентной модели (штриховые линии). Число Нуссельта в однокомпонентной модели не зависит от концентрации  $C_{v0}$  (штриховые линии для  $C_{v0} = 0, 0.01, 0.03, 0.05$  совпадают).

по приближенной формуле для среднемассовой температуры (6.74), практически совпадают.

Зависимость числа Нуссельта от расстояния вдоль оси трубы показана на рис. 6.15 (а) при  $Pe = 2500$ . Это число рассчитывалось по формуле (6.75), при этом коэффициент теплопроводности определялся при среднемассовой температуре  $T_b(z)$ . Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными работы [224], где наблюдался рост числа Нуссельта в области установившегося теплового режима (превышение составляло порядка 10 % по отношению к корреляции (6.76)). Зависимость среднего числа Нуссельта от теплового числа Пекле представлена на рис. 6.15 (б). Расчеты для однокомпонентной модели показали, что число Нуссельта не зависит от концентрации наночастиц. Результаты для двухкомпонентной модели предсказывают увеличение числа Нуссельта с ростом концентрации наночастиц и интенсивности термофореза. Отношение средних чисел Нуссельта, рассчитанных по двум рассматриваемым моделям, совпадает с отношением средних коэффициентов теплоотдачи, см. рис. 6.14 (в). Различие между корреляцией (6.76) и численными результатами объясняется переменностью физических свойств наножидкости в последнем

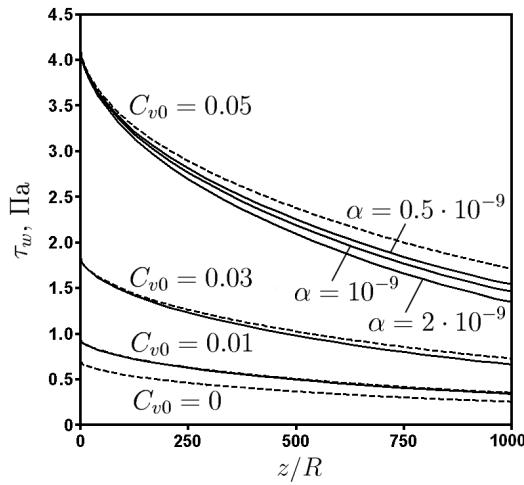


Рис. 6.16. Зависимость касательного напряжения на стенке от расстояния вдоль оси трубы для различных концентраций наночастиц при  $\text{Pe} = 2500$ . Расчет на основе двухкомпонентной модели (сплошные линии) и однокомпонентной модели (штриховые линии).

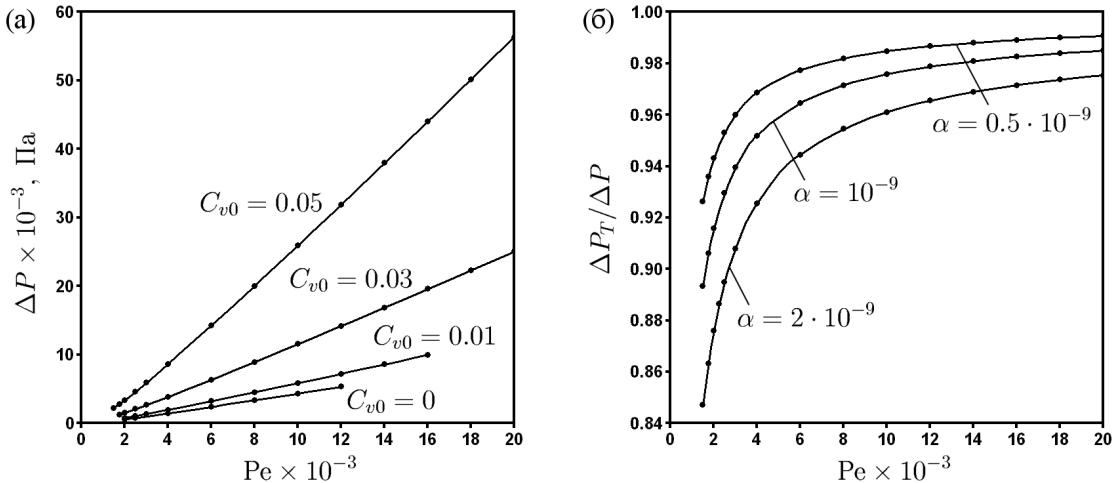


Рис. 6.17. Зависимость перепада давления в обогреваемом участке трубы от числа Пекле для различных объемных концентраций наночастиц (а). Отношение перепадов давления, рассчитанных на основе двухкомпонентной ( $\Delta P_T$ ) и однокомпонентной ( $\Delta P$ ) моделей для различных значений параметра  $\alpha$  при  $C_{v0} = 0.05$  (б).

случае.

Зависимость касательного напряжения на стенке

$$\tau_w = \mu \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

от расстояния вдоль оси трубы показана на рис. 6.16. Касательное напряжение уменьшается с увеличением расстояния от входа в трубу в силу зависимости вязкости от температуры, а также возрастает с ростом концентрации

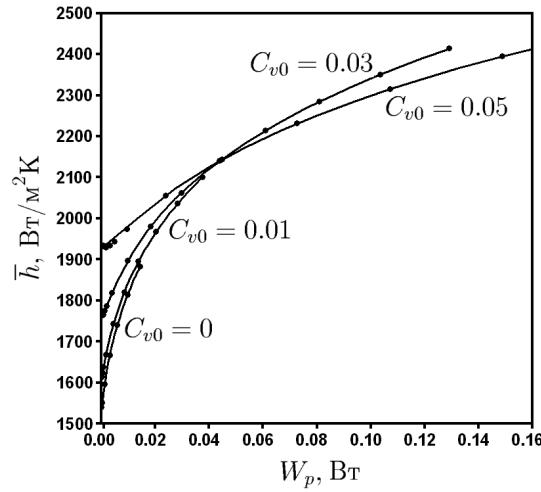


Рис. 6.18. Зависимость среднего коэффициента теплоотдачи от требуемой мощности для различных концентраций наночастиц (расчет на основе двухкомпонентной модели).

наночастиц. Падение концентрации наночастиц вблизи стенки под действием термофореза приводит к уменьшению касательного напряжения на стенке.

Зависимость разности давлений между входом в обогреваемую секцию ( $z = 0$ ) и выходом из нее ( $z = L$ ) от теплового числа Пекле показана на рис. 6.17 (а). Увеличение концентрации наночастиц приводит к значительному росту перепада давления при фиксированном значении числа Пекле. Отношение перепадов давления, рассчитанных на основе двухкомпонентной ( $\Delta P_T$ ) и однокомпонентной ( $\Delta P$ ) моделей, показано на рис. 6.17 (б). Учет термофореза наночастиц дает меньшие значения перепада давления в трубе в силу снижения вязкого трения на стенке за счет уменьшения концентрации наночастиц в пограничном слое, см. рис. 6.9, 6.11 (а), 6.16. Снижение перепада давления составляет 1.0–2.5 % при больших числах Пекле и 7–15 % при малых числах Пекле в зависимости от интенсивности термофореза.

Эффективность наножидкости вода–оксид алюминия для отвода тепла может быть оценена путем построения зависимости среднего коэффициента теплоотдачи от мощности, требуемой для прокачивания наножидкости через обогреваемую секцию (рис. 6.18). Мощность рассчитывается по формуле  $W_p = \Delta P Q$ , где  $Q = v_0 \pi R^2$  есть объемный расход. Значения  $W_p$  для всех расчетных случаев представлены в Таблице 6.3. Заметим, что полученные значения мощности меньше значений, соответствующих теоретической формуле

Таблица 6.3. Мощность  $W_p$  (Вт), необходимая для прокачивания наножидкости в обогреваемой секции (расчет на основе двухкомпонентной модели).

Pe	$C_{v0} = 0$	$C_{v0} = 0.01$	$C_{v0} = 0.03$	$C_{v0} = 0.05$
1500				0.0009
1750			0.0006	0.0014
2000	0.0003	0.0004	0.0008	0.0020
2500	0.0004	0.0006	0.0013	0.0033
3000	0.0007	0.0010	0.0021	0.0050
4000	0.0013	0.0019	0.0040	0.0097
6000	0.0032	0.0046	0.0098	0.0239
8000	0.0061	0.0086	0.0184	0.0449
10000	0.0098	0.0139	0.0298	0.0727
12000	0.0145	0.0205	0.0439	0.1073
14000		0.0284	0.0610	0.1489
16000		0.0376	0.0808	0.1974
18000			0.1036	0.2529
20000			0.1291	0.3155

$W'_p = 8\pi\mu v_0^2 L$  при  $T = T_0$  [224] в силу зависимости вязкости от температуры и снижения перепада давления под действием термофореза. Из рис. 6.18 видно, что добавление наночастиц оксида алюминия приводит к повышению эффективности отвода тепла только при малых значениях мощности, и, соответственно, малых скоростях на входе в трубу. Однако, в этом случае можно ожидать достаточно большого перепада температур в обогреваемой секции. Полученные результаты также показывают, что при малых значениях мощности наножидкость с  $C_{v0} = 0.03$  менее эффективна, чем наножидкость с  $C_{v0} = 0.05$ , в то время как при больших значениях мощности имеет место противоположная ситуация.

## Глава 7

# Устойчивость термокапиллярных течений

В данной главе рассматривается задача об устойчивости стационарного течения в бесконечном жидким мосте (цилиндре). Течение возникает под действием сил поверхностного натяжения, вызванных наличием градиента температуры на свободной границе. Результаты решения данной задачи, полученные ранее в работе [312], существенно пересмотрены. Установлено, что помимо гидротепловой волны, распространяющейся в направлении стационарного течения на поверхности, существует еще одна гидротепловая волна, которая распространяется в противоположном направлении. Последняя является наиболее опасной в области больших чисел Прандтля и существенно понижает границу устойчивости. Показано, что новые результаты лучше согласуются с экспериментом, чем данные [312]. Результаты главы основаны на работе [83].

### 7.1 Устойчивость термокапиллярного течения в жидком мосте

#### 7.1.1 Общие сведения

Исследование динамики двухфазных систем с границами раздела вида жидкость–газ является одной из сложных проблем механики сплошной среды. Термокапиллярные течения, возникающие на границе раздела за счет градиентов поверхностного натяжения, вызванных неоднородностями температуры, могут оказывать существенное влияние на движение жидкости или газа

в объеме. Это — один из механизмов возникновения конвекции в отсутствии гравитации. Течения на межфазной границе играют важную роль в таких процессах, как движение жидких пленок, распространение струй, эволюция волн в океанах.

Термокапиллярный эффект существенно влияет на процесс выращивания кристаллов методом бестигельной зонной плавки [313, 314]. В данном методе заготовка и затравочный кристалл в виде стержней различного диаметра устанавливаются соосно, их концы оплавляются и приводятся в соприкоснение. Расплавление производится с помощью кругового нагревательного элемента (как правило, используется высокочастотный индуктор). За последующее удержание расплавленной зоны отвечают силы поверхностного натяжения расплава. Заготовку и затравочный кристалл медленно перемещают вниз относительно зоны нагрева так, чтобы расплавленная зона постепенно поглощала все новые участки заготовки, а внизу из зоны постепенно вытягивался уже готовый кристалл. Метод зонной плавки используется для очистки твердых веществ от примесей. Если примесь лучше растворяется в жидкой фазе, чем в твердой, то она постепенно накапливается в расплавленной зоне, двигаясь вместе с ней. Готовые кристаллы представляют собой образцы вещества, практически лишенные примесей.

Для изучения процессов в зоне расплава часто используется модель жидкого моста (или половинной зоны) [315]. В данной модели объем жидкости помещен между двумя цилиндрическими стержнями, которые имеют общую ось и расположены на некотором расстоянии друг от друга. Разность температур между стержнями приводит к возникновению градиента поверхностного натяжения на свободной границе, который, в свою очередь, вызывает термокапиллярное движение жидкости. При небольших разностях температур термокапиллярное течение стационарное, однако с ростом разности температур это течение может стать неустойчивым. Развитие неустойчивости связано с появлением монотонных или колебательных возмущений, при этом последние представляют собой стоячие или бегущие гидротепловые волны (характери-

зуемые азимутальным волновым числом  $m$ ). Аналогичная неустойчивость в зоне расплава приводит к изменению температуры и концентрации примесей вблизи фронта кристаллизации, что ведет к ухудшению качества кристалла при выращивании методом зонной плавки.

Точное решение, описывающее стационарное термокапиллярное течение в жидком мосте (цилиндре) было получено в работе [316]. Линейный анализ устойчивости этого течения для бесконечного жидкого цилиндра был проведен в [312]. Предполагалось, что свободная граница является недеформируемой, а теплообмен через границу характеризуется числом Био. Были определены критические числа Марангони Ма для мод  $m = 0$  и  $m = 1$  и установлено, что с ростом числа Прандтля происходит смена критической моды с  $m = 1$  на  $m = 0$ . Экспериментальные исследования термокапиллярной неустойчивости в длинном жидком мосте в условиях невесомости проводились в работах [317, 318]. Согласие этих результатов с теоретической работой [312] было признано удовлетворительным. Заметим, что последняя работа хорошо известна в теории жидких мостов и часто цитируются в литературе [314, 315, 317–320].

В настоящем параграфе будет проведен пересмотр результатов работы [312] и показано, что они являются верными лишь в области малых чисел Прандтля. При больших числах Прандтля граница устойчивости существенно понижается за счет новой, неизвестной ранее моды неустойчивости.

### 7.1.2 Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный жидкий мост, ограниченный цилиндрической недеформируемой свободной поверхностью  $r = R$  (рис. 7.1). Жидкость характеризуется плотностью  $\rho$ , динамической вязкостью  $\mu$ , теплопроводностью  $\kappa$  и теплоемкостью  $c_p$ , которые предполагаются постоянными. Вдоль оси  $z$  приложен постоянный градиент температуры  $\partial T / \partial z = A > 0$ . Предполагается, что поверхностное натяжение линейно зависит от температуры:  $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$ , где  $T_0$  — температура свободной поверхности при  $z = 0$ ,

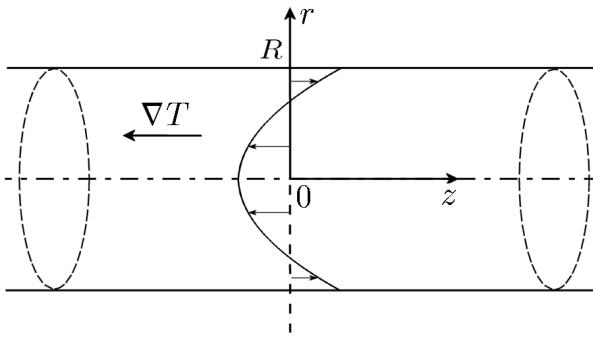


Рис. 7.1. Бесконечный жидкий мост.

$\sigma_0$  — поверхностное натяжение при этой температуре,  $\sigma_T > 0$  — температурный коэффициент поверхностного натяжения. Теплообмен через свободную границу характеризуется поверхностным коэффициентом теплоотдачи  $h$ .

Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ . Течение жидкости и теплообмен описываются вектором скорости  $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi, u_z)$ , давлением  $p$  и температурой  $T$ . Эти величины удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса и переноса тепла. Введем безразмерные переменные

$$t = \frac{\mu}{\sigma_T A} t^*, \quad r = R r^*, \quad z = R z^*,$$

$$\mathbf{u} = \frac{\sigma_T A R}{\mu} \mathbf{u}^*, \quad T - T_0 = A R T^*, \quad p = \sigma_T A p^*.$$

Опуская для простоты индексы у безразмерных переменных, запишем безразмерные уравнения движения в отсутствие силы тяжести в виде

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} - \frac{(u_\varphi)^2}{r} &= \frac{\text{Pr}}{\text{Ma}} \left( -\frac{\partial p}{\partial r} + \Delta u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2} \right), \\ \frac{du_\varphi}{dt} + \frac{u_r u_\varphi}{r} &= \frac{\text{Pr}}{\text{Ma}} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right), \\ \frac{du_z}{dt} &= \frac{\text{Pr}}{\text{Ma}} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta u_z \right), \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{\text{Ma}} \Delta T, \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Рассматриваемая задача характеризуется следующими безразмерными параметрами

$$\text{Ma} = \frac{\rho c_p \sigma_T A R^2}{\mu \kappa}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\kappa}, \quad \text{Ca} = \frac{\sigma_T A R}{\sigma_0}, \quad \text{Bi} = \frac{h R}{\kappa}.$$

где Ma — число Марангони, Pr — число Прандтля, Ca — капиллярное число, Bi — число Био.

Предполагается, что изменение поверхностного натяжения под действием неоднородностей температуры значительно меньше среднего значения  $\sigma_0$  (т.е.  $\text{Ca} \rightarrow 0$ ). Таким образом, свободную границу можно считать недеформируемой. Безразмерный перепад давления между жидкостью и окружающим газом имеет порядок  $\text{Ca}^{-1}$ , что соответствует  $\sigma_0/R$  в размерном виде.

На свободной границе  $r = 1$  должны быть выполнены кинематическое и динамическое условия. Кроме этого, ставится условие теплообмена по закону Ньютона:

$$u_r = 0, \quad \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = -\frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = -\frac{\partial T}{\partial z}, \quad -\frac{\partial T}{\partial r} = \text{Bi}(T - T_\infty), \quad (7.2)$$

где  $T_\infty$  — безразмерная температура газа, окружающего жидкий мост. На оси  $r = 0$  ставится условие ограниченности всех величин:

$$|u_r|, |u_\varphi|, |u_z|, |T|, |p| < \infty.$$

Точное решение, описывающее стационарное термокапиллярное течение в бесконечном жидким мосте, было получено в работе [312]:

$$u_r^0 = u_\varphi^0 = 0, \quad u_z^0 = \frac{1}{2} \left( r^2 - \frac{1}{2} \right), \quad (7.3)$$

$$p^0 = 2z + \text{Ca}^{-1}, \quad T^0 = -\frac{\text{Ma}}{32} (r^2 - 1)^2 - z, \quad T_\infty = -z.$$

На свободной границе жидкость движется в направлении градиента поверхностного натяжения, в то время как вблизи оси наблюдается обратное течение

за счет градиента давления (рис. 7.1). Такое движение может быть реализовано экспериментально в длинном жидкокомпактном мосте (за исключением областей вблизи холодного и горячего стержней, удерживающих жидкость) [317].

Рассмотрим задачу об устойчивости стационарного течения (7.3) относительно малых возмущений. Введем последние согласно формуле

$$(\mathbf{u}, p, T) = (\mathbf{u}^0, p^0, T^0) + (\mathbf{u}', p', T').$$

Линеаризуем уравнения (7.1) и граничные условия (7.2) относительно основного состояния (7.3). Будем рассматривать нормальные возмущения

$$(u'_r, u'_\varphi, u'_z, p', T') = (u(r), v(r), w(r), p(r), \theta(r)) \exp(-\lambda t + ikz + im\varphi),$$

где  $\lambda = \lambda_r + i\omega$  — комплексный декремент,  $k$  и  $m$  — волновые числа в направлениях  $z$  и  $\varphi$  соответственно.

Уравнения для амплитуд возмущений имеют вид

$$\begin{aligned} & \left( D - k^2 - \frac{m^2 + 1}{r^2} + \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} (\lambda - ik u_z^0) \right) u - \frac{2im}{r^2} v - p' = 0, \\ & \left( D - k^2 - \frac{m^2 + 1}{r^2} + \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} (\lambda - ik u_z^0) \right) v + \frac{2im}{r^2} u - \frac{im}{r} p = 0, \\ & \left( D - k^2 - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} (\lambda - ik u_z^0) \right) w - \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} (u_z^0)' u - ikp = 0, \\ & \left( D - k^2 - \frac{m^2}{r^2} + \text{Ma} (\lambda - ik u_z^0) \right) \theta + \text{Ma} (w - (T^0)' u) = 0, \\ & u' + \frac{u}{r} + \frac{im}{r} v + ik w = 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Здесь  $D = d^2/dr^2 + r^{-1}d/dr$ , а штрих соответствует производной  $d/dr$ . Амплитуды возмущений удовлетворяют граничным условиям:

$$r = 1 : \quad u = 0, \quad v' - v + im\theta = 0, \quad (7.5)$$

$$w' + ik\theta = 0, \quad \theta' + \text{Bi}\theta = 0.$$

Для определения значений искомых функций в окрестности  $r = 0$  используется асимптотическое разложение [312]. Для  $m > 0$  оно имеет вид

$$u \sim r^{m-1} (s_1 + u_2 r^2 + u_4 r^4 + \dots),$$

$$\begin{aligned}
v &\sim r^{m-1}(v_0 + v_2r^2 + v_4r^4 + \dots), \\
w &\sim r^m(s_2 + w_2r^2 + w_4r^4 + \dots), \\
p &\sim r^m(s_3 + p_2r^2 + p_4r^4 + \dots), \\
\theta &\sim r^m(s_4 + \theta_2r^2 + \theta_4r^4 + \dots),
\end{aligned} \tag{7.6}$$

в то время как при  $m = 0$  имеем  $v = 0$  и

$$\begin{aligned}
u &\sim r(u_2r^2 + u_4r^4 + \dots), \\
w &\sim s_2 + w_2r^2 + w_4r^4 + \dots, \\
p &\sim s_3 + p_2r^2 + p_4r^4 + \dots, \\
\theta &\sim s_4 + \theta_2r^2 + \theta_4r^4 + \dots
\end{aligned} \tag{7.7}$$

В указанных соотношениях постоянные  $s_1, s_2, s_3, s_4$  произвольные, а другие постоянные определяются через них из уравнений (7.1).

Задача (7.4)–(7.7) обладает свойством инвариантности относительно замены

$$m \rightarrow -m, \quad v \rightarrow -v, \tag{7.8}$$

что позволяет считать  $m \geq 0$  (рассмотрение отрицательных значений  $m$  не приводит к расширению спектра). Заметим, что в силу непрерывности решения по углу  $\varphi$  спектр значений  $m$  дискретный ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Рассматриваемая задача также инвариантна относительно замены переменных

$$\begin{aligned}
k &\rightarrow -k, \quad \lambda \rightarrow \bar{\lambda}, \\
u &\rightarrow \bar{u}, \quad v \rightarrow -\bar{v}, \quad w \rightarrow \bar{w}, \quad p \rightarrow \bar{p}, \quad \theta \rightarrow \bar{\theta},
\end{aligned} \tag{7.9}$$

где черта означает комплексное сопряжение. Применение преобразований (7.8) и (7.9) к произвольному решению задачи дает два решения, одно из которых является комплексно-сопряженным к другому. Так как физически значимые возмущения соответствуют реальным частям решения, оба указанных преобразования дают одно и то же физическое решение (за исключением случая  $m = 0$ , где  $v = 0$  и преобразование (7.8) сводится к тождественному). Из (7.9) следует, что колебательная неустойчивость связана с появлением двух волн

с противоположными волновыми числами  $k$  и частотами  $\omega$ . Эти волны распространяются в направлениях, задаваемых углами  $\alpha = \pm \arctg(m/|k|)$  по отношению к оси  $z$ .

Для решения задачи (7.4)–(7.7) используется пошаговое интегрирование методом Рунге–Кутты–Мерсона 5 порядка точности с ортогонализацией [37, 292]. Система (7.4) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка  $\mathbf{x}' = B\mathbf{x}$  с помощью замены переменных

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \equiv (u, v', w', \theta', p, v, w, \theta)$$

и интегрируется на отрезке  $\varepsilon \leq r \leq 1$  (в расчетах использовалось значение  $\varepsilon = 0.001$ ). В случае  $m > 0$  ( $m = 0$ ) система содержит восемь (шесть) искомых функций, при этом строятся четыре (три) линейно–независимых решения путем задания различных начальных условий в точке  $r = \varepsilon$ . Это становится возможным благодаря тому, что соотношения (7.5) определяют условия лишь для половины искомых функций, а разложения (7.6) и (7.7) содержат четыре и три произвольных константы соответственно. Амплитуды возмущений ищутся в виде линейных комбинаций найденных решений, коэффициенты которых определяются из четырех (трех) условий на границе раздела  $r = 1$  при  $m > 0$  ( $m = 0$ ). Для существования нетривиального решения соответствующей однородной системы линейных уравнений необходимо, чтобы ее определитель  $\Pi$  был равен нулю

$$\Pi(\lambda, m, k, \text{Ma}, \text{Pr}, \text{Bi}) = 0$$

Из этого соотношения определяется спектр комплексных декрементов  $\lambda$ , что, в свою очередь, позволяет рассчитать границы устойчивости системы в пространстве параметров.

### 7.1.3 Обсуждение результатов

Типичная структура нейтральных кривых для мод  $m = 0, 1$  на плоскости  $(k, \text{Ma})$  представлена на рис. 7.2 (а) для  $\text{Pr} = 50$ ,  $\text{Bi} = 0$  (теплообмен через свободную поверхность отсутствует). Эти кривые соответствуют колебательной неустойчивости. Зависимость критической частоты  $\omega$  от волнового числа

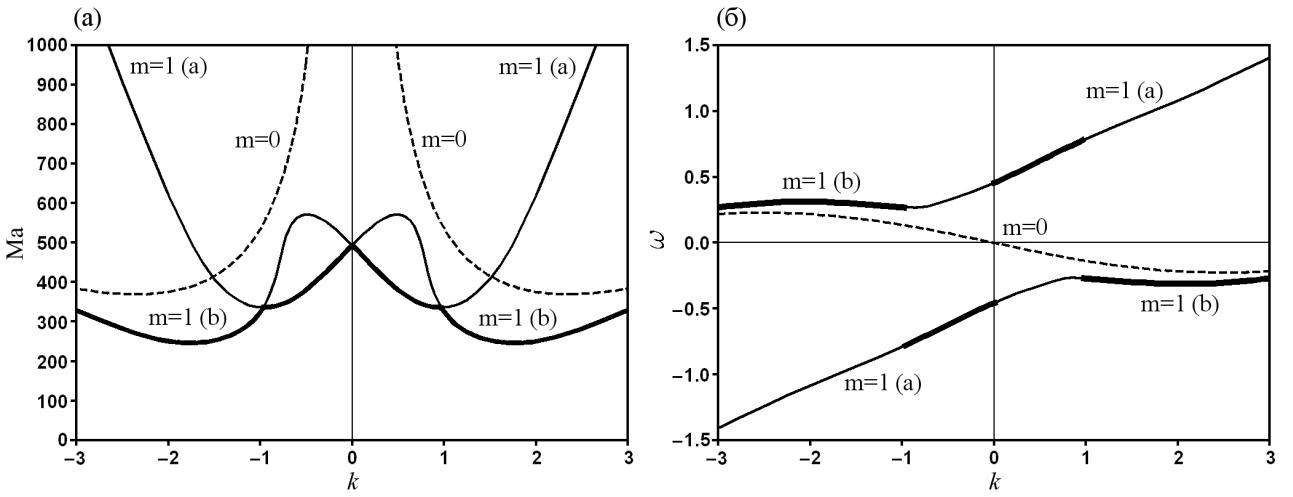


Рис. 7.2. Нейтральные кривые: критическое число Марангони (а), критическая частота (б) для мод  $m = 0$  и  $m = 1$ . Граница устойчивости показана жирной линией.  $\text{Pr} = 50$ ,  $\text{Bi} = 0$ .

$k$  показана на рис. 7.2 (б). Благодаря свойству симметрии (7.9) нейтральные кривые симметричны относительно линии  $k = 0$ . Мода  $m = 1$  имеет две подмоды, обозначенные буквами (а) и (б). Граница устойчивости соответствует наиболее опасной подмоде (при фиксированном  $k$ ) и показана жирной линией. Из графика видно, что при  $|k| = 0.96$  происходит смена наиболее опасной подмоды, при этом знак и абсолютное значение круговой частоты  $\omega$  меняются, см. рис. (7.2) (б). Критическими параметрами неустойчивости для  $\text{Pr} = 50$ ,  $\text{Bi} = 0$  являются  $\text{Ma}_c = 246.35$ ,  $k_c = \pm 1.771$ ,  $\omega_c = \mp 0.308$ . Эти значения соответствуют подмоде  $m = 1$  (б). В работе [312] для указанных значений чисел Прандтля и Био были получены следующие значения критических параметров:  $\text{Ma}_c = 336.49$ ,  $k_c = 0.962$ ,  $\omega_c = 0.779$ . Эти параметры соответствуют минимуму подмоды  $m = 1$  (а) при  $k > 0$ . Согласно результатам настоящей работы, эта подмода не является наиболее опасной.

Тот факт, что подмода  $m = 1$  (б) не была обнаружена в работе [312], можно объяснить следующим образом. С помощью точного решения задачи в случае  $k = 0$  авторы нашли число Марангони  $\text{Ma}$  и два собственных значения  $\lambda = \pm i\omega$ , которые соответствуют нейтральной моде  $m = 1$ . С помощью численных расчетов эта мода была продолжена в область  $k > 0$  при условии  $\lambda = i\omega$ ,  $\omega > 0$ . В результате была найдена подмода  $m = 1$  (а). В данной работе

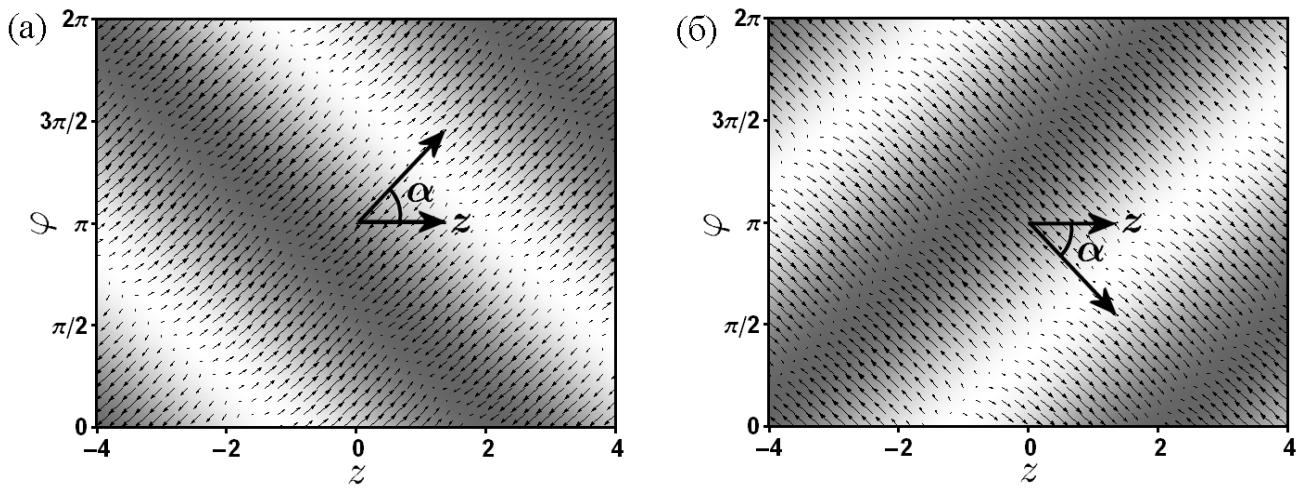


Рис. 7.3. Критические возмущения на свободной границе для подмоды  $m = 1$  (а):  $\text{Pr} = 50$ ,  $\text{Bi} = 0$ ,  $\text{Ma}_c = 336.49$ . Показаны гидротепловые волны с параметрами  $k_c = 0.962$ ,  $\omega_c = 0.779$ ,  $\alpha = 46.11^\circ$  (а) и  $k_c = -0.962$ ,  $\omega_c = -0.779$ ,  $\alpha = -46.11^\circ$  (б).

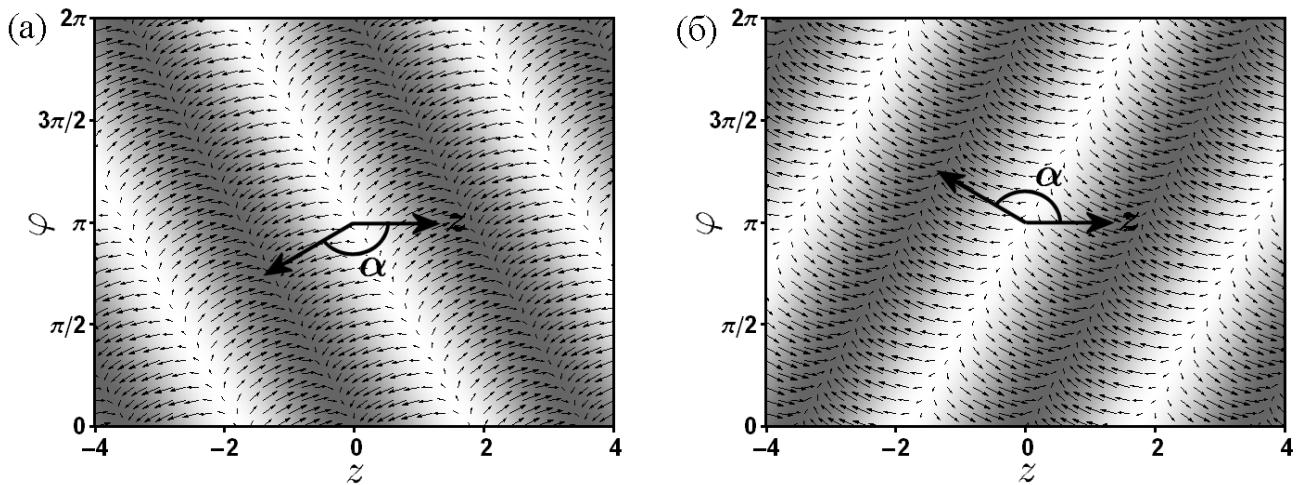


Рис. 7.4. Критические возмущения на свободной границе для подмоды  $m = 1$  (б):  $\text{Pr} = 50$ ,  $\text{Bi} = 0$ ,  $\text{Ma}_c = 246.35$ . Показаны гидротепловые волны с параметрами  $k_c = 1.771$ ,  $\omega_c = -0.308$ ,  $\alpha = -150.55^\circ$  (а) и  $k_c = -1.771$ ,  $\omega_c = 0.308$ ,  $\alpha = 150.55^\circ$  (б).

мы обнаружили новую подмоду  $m = 1$  (б), которая получается путем продолжения результатов для  $k = 0$  в область  $k > 0$  при условии  $\lambda = -i\omega$ ,  $\omega > 0$ . В отличие от случая  $k = 0$ , при ненулевых волновых числах собственные значения, соответствующие подмодам (а) и (б), не равны по абсолютной величине. Наличие новой подмоды приводит к изменению глобального минимума нейтральной кривой  $m = 1$ . Заметим, что нейтральные кривые для мод более

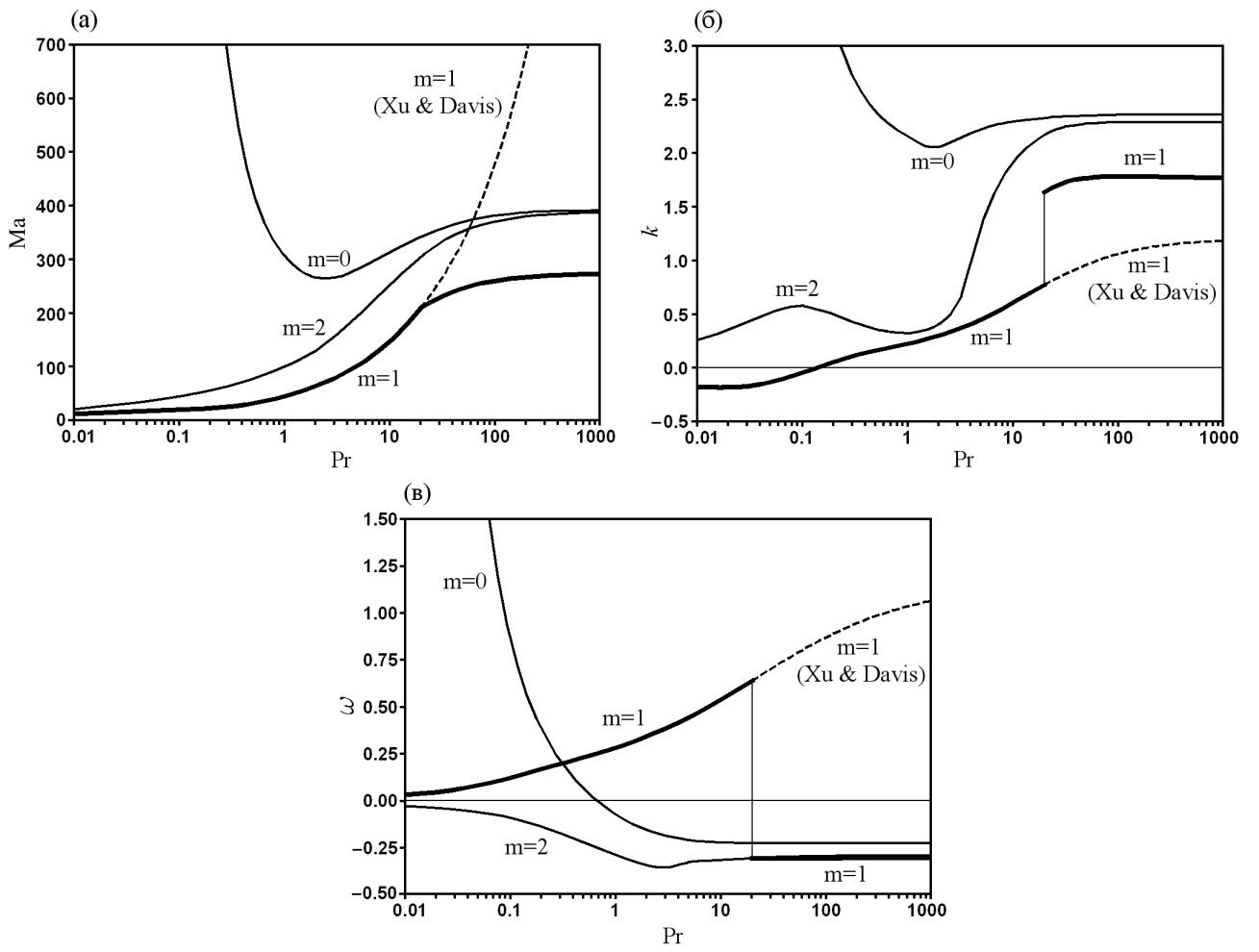


Рис. 7.5. Зависимость критических параметров от числа Прандтля при  $\text{Bi} = 0$ : число Марангони (а), волновое число (б), круговая частота (в). Показаны моды  $m = 0, 1, 2$ . Сравнение результатов настоящей работы (сплошные линии) и работы Xu & Davis [312] (штриховая линия).

высокого порядка ( $m = 2, 3, \dots$ ) имеют аналогичную структуру.

Согласно (7.9), колебательная неустойчивость связана с появлением пары гидротепловых волн, которые распространяются в направлениях, задаваемых противоположными углами по отношению к вертикальной оси  $z$ . Расчеты показывают, что для  $m = 1$  имеются две пары таких волн. Одна пара волн распространяется в направлениях, образующих острый угол с осью  $z$  (подмода (а) для положительных и отрицательных  $k$ ), а другая пара — в направлениях, образующих тупой угол с осью  $z$  (подмода (б) для положительных и отрицательных  $k$ ). Структура критических возмущений на свободной границе для подмод (а) и (б) показана на рис. 7.3 и 7.4 соответственно. Более

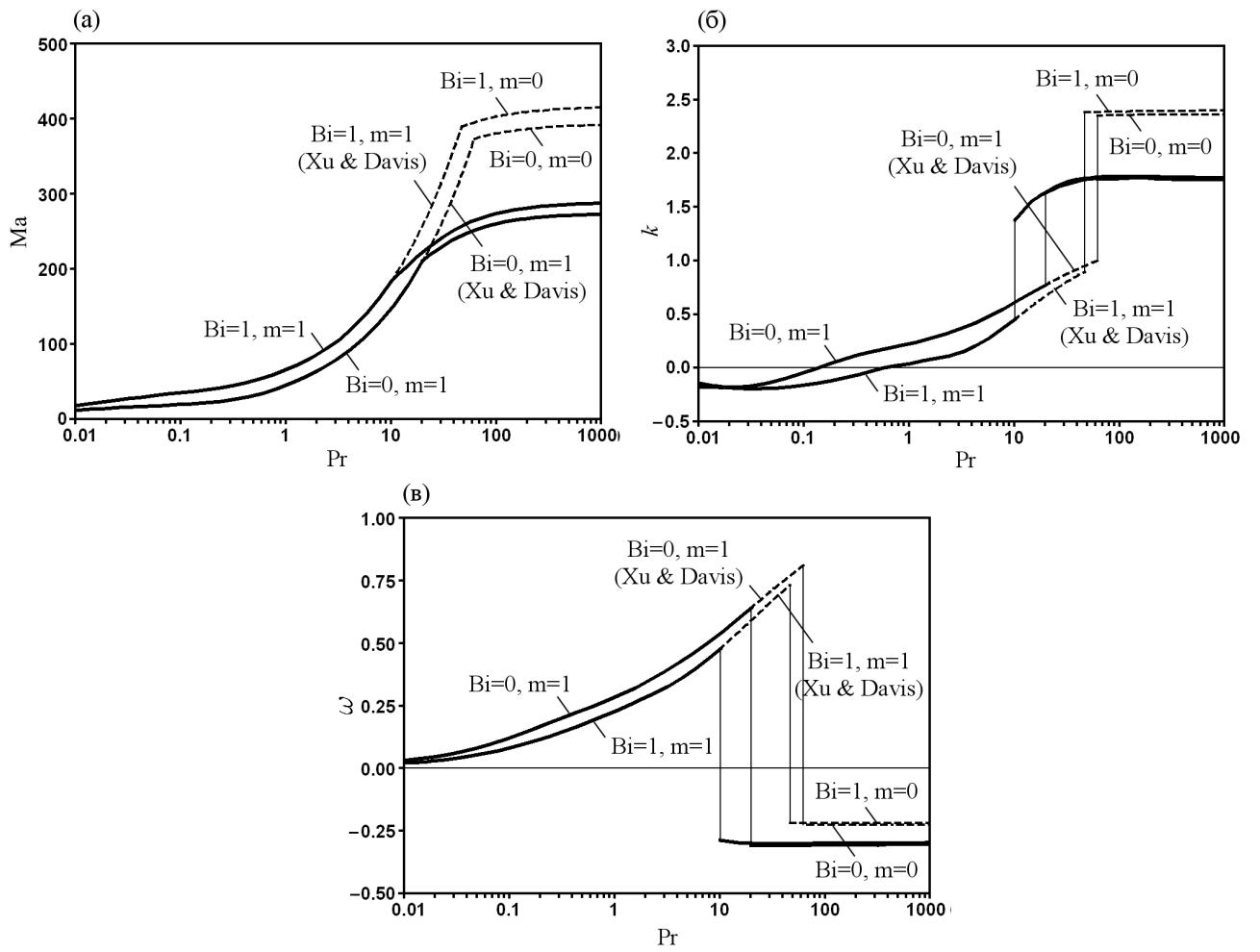


Рис. 7.6. Зависимость критических параметров от числа Прандтля при  $\text{Bi} = 0$  и  $\text{Bi} = 1$ : число Марангони (а), волновое число (б), круговая частота (в). Сравнение результатов настоящей работы (сплошные линии) и работы Xu & Davis [312] (штриховые линии).

светлые (темные) области соответствуют более высокой (низкой) температуре. Течение направлено вдоль градиента поверхностного натяжения, который направлен противоположно градиенту температуры. Если рассмотреть проекции направлений распространения волн на ось  $z$ , то можно сказать, что подмода (а) соответствует паре волн, распространяющихся вдоль стационарного течения на свободной поверхности, а подмода (б) соответствует паре волн, распространяющихся в противоположном направлении.

Зависимость критических параметров (числа Марангони, волнового числа и круговой частоты) от числа Прандтля для мод  $m = 0, 1, 2$  при  $\text{Bi} = 0$  представлена на рис. 7.5. Показаны характеристики одной из двух волн (ха-

рактеристики другой соответствуют противоположным значениям  $k$  и  $\omega$ ). Мода  $m = 1$  всегда является критической. Для малых чисел Прандтля наиболее опасной является подмода (а), в то время как для больших чисел Прандтля наиболее неустойчива подмода (б). Смена критической подмоды происходит в точке  $\text{Pr} = 19.95$ . Критические параметры, найденные в работе [312] и соответствующие подмоде (а), показаны на рис. 7.5 штриховой линией. Результаты настоящей работы показывают, что смена критической моды с  $m = 1$  на  $m = 0$  с ростом числа Прандтля [312] не происходит.

Сравнение критических параметров неустойчивости для  $\text{Bi} = 0$  и  $\text{Bi} = 1$  представлено на рис. 7.6. Критическое число Марангони для  $\text{Bi} = 1$  выше, чем для  $\text{Bi} = 0$ . Таким образом, теплообмен с окружающим газом стабилизирует стационарное течение (заметим, что температура газа описывается зависимостью  $T_\infty = -z$ ). Из графиков видно, что для  $\text{Bi} = 1$  результаты работы [312] соответствуют завышенным значениям критического числа Марангони при  $\text{Pr} > 10.2$ . Кроме этого, данные этой работы предсказывают смену критической моды неустойчивости с  $m = 1$  на  $m = 0$  при  $\text{Pr} = 47.5$ . На самом деле, в рассматриваемом диапазоне чисел Прандтля критической модой всегда является  $m = 1$ . Значения критических параметров, соответствующие различным числам Прандтля, представлены в Таблице 7.1 для  $\text{Bi} = 0$  и  $\text{Bi} = 1$ .

Сравним полученные результаты с экспериментальными данными. Термокапиллярная неустойчивость в длинном жидким мосте в условиях невесомости исследовалась в работах [317, 318]. Рассматривался жидкий мост радиусом  $R = 3$  мм и отношением высоты к радиусу  $H/R = 5$ . В качестве рабочей жидкости использовалось силиконовое масло (2 сСт) со следующими физическими характеристиками:  $\sigma_0 = 1.95 \times 10^{-2}$  Н/м,  $\sigma_T = 6.40 \times 10^{-5}$  Н·м·К,  $\rho = 860$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 1.72 \times 10^{-3}$  Па·с,  $\kappa = 0.10$  Вт/м·К,  $c_p = 1727$  Дж/кг·К. Указанные значения физических свойств соответствуют температуре  $T_0 = 35$  °C. Число Прандтля для силиконового масла  $\text{Pr} = 29.41$ . Сравнение расчетных и экспериментальных результатов представлено в Таблице 7.2. Приводятся абсолютные значения волнового числа  $k$  и безразмерной круговой частоты  $\omega$ .

Таблица 7.1. Критические параметры неустойчивости.

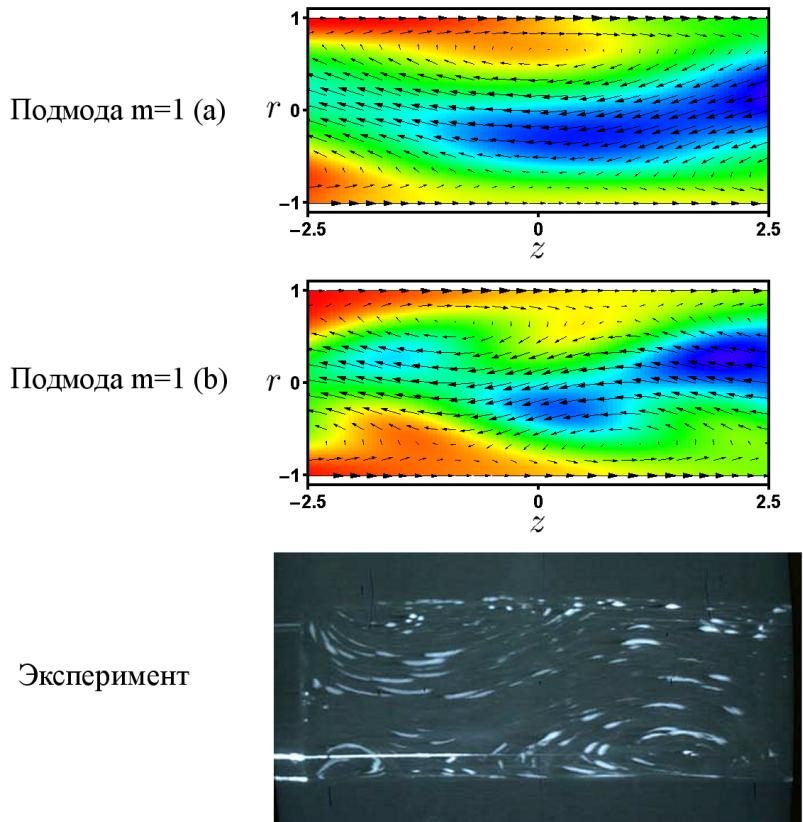
		Данная работа					Xu & Davis [312]		
Bi	Pr	$m$	Ma	$k$	$\omega$	$m$	Ma	$k$	$\omega$
0	0.1	1	19.70	-0.045	0.1224	1	19.70	-0.045	0.1224
	0.5	1	31.57	0.163	0.2328	1	31.57	0.163	0.2328
	1	1	44.83	0.224	0.2830	1	44.83	0.224	0.2830
	5	1	102.58	0.451	0.4451	1	102.58	0.451	0.4451
	10	1	147.44	0.609	0.5382	1	147.50	0.611	0.5388
	15	1	182.08	0.708	0.5984	1	182.19	0.707	0.5980
	20	1	211.03	1.640	-0.3075	1	211.18	0.776	0.6422
	25	1	221.55	1.693	-0.3087	1	236.91	0.805	0.6760
	50	1	246.35	1.770	-0.3083	1	336.49	0.963	0.7791
	75	1	255.72	1.782	-0.3074	0	378.01	2.350	-0.2256
	100	1	260.19	1.784	-0.3067	0	381.93	2.350	-0.2256
1	0.1	1	35.42	-0.160	0.0811	1	35.43	-0.159	0.0811
	0.5	1	51.30	-0.014	0.1763	1	51.30	-0.014	0.1763
	1	1	65.74	0.040	0.2269	1	65.74	0.040	0.2269
	5	1	130.57	0.233	0.3762	1	130.57	0.233	0.3762
	10	1	183.59	0.452	0.4768	1	183.68	0.450	0.4764
	15	1	206.96	1.551	-0.2965	1	224.34	0.584	0.5436
	20	1	222.31	1.635	-0.3001	1	258.14	0.672	0.5919
	25	1	233.21	1.682	-0.3013	1	288.05	0.738	0.6300
	50	1	259.21	1.754	-0.3014	0	392.48	2.375	-0.2193
	75	1	268.93	1.764	-0.3005	0	400.33	2.381	-0.2190
	100	1	273.90	1.765	-0.2999	0	404.51	2.386	-0.2182
	250	1	282.96	1.759	-0.2987	0	410.64	2.394	-0.2185
	500	1	286.00	1.754	-0.2982	0	418.00	2.400	-0.2182

Таблица 7.2. Сравнение результатов расчетов для бесконечного жидкого моста и экспериментальных результатов для длинного жидкого моста ( $R = 3$  мм,  $H/R = 5$ ).

	Bi	$m$	$k$	$A$ К/м	$f$ Гц	Ma	$\omega$	Направление волны
Xu & Davis [312]	3.5	0	2.44	86.7	0.104	426.9	0.203	Против течения
Xu & Davis [312]	0	1	0.86	52.2	0.217	257.1	0.701	По течению
Данная работа	3.5	1	1.66	54.5	0.092	268.3	0.285	Против течения
Данная работа	0	1	1.72	46.4	0.085	228.7	0.309	Против течения
Эксперимент [318]		1	—	39	0.114	192	0.495	Против течения

Размерная частота колебаний  $f$  вычисляется по формуле  $f = \sigma_T A \omega / 2\pi\mu$ .

В эксперименте [318] число Био было оценено как  $Bi = 3.5$ . Проводилось сравнение результатов для  $Ma \sim 2Ma_c$  с расчетами [312] для  $Bi = 0$ ,  $Ma = Ma_c$ . Сравнение расчетных данных и экспериментальных результатов при  $Ma \sim Ma_c$  для указанных значений  $Bi$  представлено в Таблице 7.2. Заметим, что в работе [312] не указаны критические параметры для  $Bi = 3.5$ . Значение в таблице получено на основе расчета локального (не глобального) минимума нейтральных кривых  $m = 1, 2$ . В этом случае критической модой для  $Bi = 3.5$  является  $m = 0$ . Как видно, результаты настоящей работы лучше согласуются с экспериментом, чем данные работы [312]. С другой стороны, трудно сказать, какие критические параметры (для  $Bi = 0$  или  $Bi = 3.5$ ) лучше соответствуют эксперименту. Расчеты показывают, что критические значения размерного градиента температуры  $A$  и размерной частоты  $f$  увеличиваются с ростом числа Био (т.е. с ростом теплоотдачи через свободную границу). Таким образом, разность между расчетным и экспериментальным значениями  $A$  растет, в то время как разность между соответствующими значениями  $f$  уменьшается. Согласно данным настоящей работы, гидротепловые волны распространяются в противоположном направлении по отношению к стационарному течению на свободной поверхности. Этот результат согласуется с экспериментом и противоречит данным работы [312] (за исключением случая



С разрешения D. Schwabe

Рис. 7.7. Структура течения в жидким мосте вблизи порога неустойчивости в осевом сечении  $\varphi = 0 - \pi$ . Сравнение эксперимента [318] и численного расчета для подмоды  $m = 1$  (а) с критическими параметрами  $Ma_c = 257.11$ ,  $k_c = 0.86$ ,  $\omega_c = 0.701$  и подмоды  $m = 1$  (б) с критическими параметрами  $Ma_c = 228.71$ ,  $k_c = 1.72$ ,  $\omega_c = -0.309$ .

$Bi = 3.5$ ; однако, критическая мода здесь определена неправильно).

Различие между экспериментальными и расчетными значениями критических параметров связано с тем, что последние соответствуют бесконечному жидкому мосту, в то время как в эксперименте жидкий мост имеет конечную длину. Кроме этого, для корректного сравнения результатов необходимо брать экспериментальное значение градиента температуры в центральной части жидкого моста, исключая при этом тепловые пограничные слои вблизи нагреваемого и холодного стержней (в особенности для жидкостей с большим числом Прандтля). Согласно данным [318], это значение примерно в десять раз меньше, чем  $\Delta T/H$ , где  $\Delta T$  — приложенная разность температур. Экспериментальное значение  $A = 39$  К/м было оценено на основе указанных

соображений.

Заметим, что в модели бесконечного жидкого моста не учитываются тепловые пограничные слои вблизи твердых стержней. В то же время, неоднородности температуры на свободной поверхности вблизи стержней весьма существенны для жидкостей с большим числом Прандтля. Термокапиллярные силы в этой области могут играть определяющую роль в развитии неустойчивостей в жидком мосте [321]. Другим ограничением рассматриваемой модели является недеформируемая свободная поверхность. Динамическая деформация свободной поверхности может оказывать влияние на механизм колебательной неустойчивости [321, 322]. Заметим, что полное понимание этого механизма для жидкостей с большим числом Прандтля до сих пор не достигнуто. Учитывая описанные выше ограничения, некоторое различие между экспериментальными данными и результатами расчета для бесконечного жидкого моста представляется естественным.

На рис. 7.7 показана структура течения и поля температур в осевом сечении жидкого моста для подмод  $m = 1$  (a) и  $m = 1$  (b). Эти структуры были получены путем суперпозиции стационарного течения (7.3) и возмущений. Максимальные абсолютные значения возмущений скорости и температуры составляли 40 % от соответствующих значений основного состояния. На рисунке также приведена фотография жидкого моста из экспериментальной работы [318]. На свободной поверхности жидкость движется от нагревенного конца (слева) к холодному концу (справа), в то время как в центральной части течение имеет обратное направление. Структура течения, соответствующая подмоде  $m = 1$  (b), лучше согласуется с экспериментом. В частности, ясно видны два вихря в левой верхней и нижней правой частях рисунка. Качественное согласие результатов является дополнительным аргументом в пользу того, что новая мода неустойчивости, обнаруженная в настоящей работе, действительно имеет место в эксперименте.

## Глава 8

# Термовибрационная конвекция в условиях низкой гравитации

В данной главе проведено экспериментальное и численное исследование термовибрационной конвекции в условиях низкой гравитации параболического полета. Рабочая жидкость (изопропанол) помещена в кубическую ячейку с разностью температур между верхней и нижней стенками. Ячейка совершает поступательные вибрации с высокой частотой и малой амплитудой. Эволюция поля температур в жидкости под действием термовибрационной конвекции исследуется экспериментально методом цифровой оптической интерферометрии. Структура осредненного поля температур, наблюдаемая экспериментально, подтверждает результаты предыдущих численных исследований. Обнаружено значительное увеличение переноса тепла в полости под действием осредненных термовибрационных течений. Прямое численное моделирование течений в трехмерной постановке и численный расчет на основе осредненных двумерных уравнений движения показали хорошее согласие с результатами эксперимента. Исследовано влияние остаточных ускорений в параболическом полете на перенос тепла и режимы конвекции в полости. Проведено сравнение результатов с данными эксперимента. Показано, что конвективные течения, возникающие в поле силы тяжести в неоднородно нагретых жидкостях, могут быть воспроизведены в невесомости с помощью вибрации. Результаты главы основаны на работах [72, 73, 78, 79, 94]. Эти результаты использовались при подготовке космического эксперимента IVIDIL, посвященного изучению влияния вибрации на диффузию и термодиффузию в бинарных смесях [81].

## 8.1 Исследование термовибрационной конвекции

### 8.1.1 Описание эксперимента

Вибрационной конвекцией называют течения, возникающие в жидкости или газе с градиентом плотности под действием внешней вибрации. Градиент плотности может быть вызван градиентом температуры или градиентом концентрации (в смесях). В этих случаях говорят о *термовибрационной* или *концентрационно–вибрационной* конвекции соответственно. Если период колебаний много меньше характерных времен (вязкого, теплового, диффузационного), то говорят о вибрациях высокой частоты. В этом случае все величины, характеризующие движение и тепломассообмен, можно разделить на две составляющие: осредненную (получается осреднением данной величины по периоду колебаний) и пульсационную (представляет собой разность данной величины и ее осреднения). Подробный обзор работ по исследованию поведения жидкостей под действием вибрации был дан в параграфе 1.3.

Термовибрационный механизм конвекции в чистом виде можно наблюдать только в невесомости. С целью экспериментального исследования осредненных течений в условиях низкой гравитации была разработана специальная экспериментальная установка (рис. 8.1). Рабочая жидкость помещается в кубическую ячейку с внутренним размером  $L = 5$  мм. Боковые стенки ячейки являются прозрачными и выполнены в форме призм из кварцевого стекла, см. рис. 8.1 (в). Верхняя и нижняя стенки ячейки поддерживаются при постоянных температурах  $T_{гор}$  и  $T_{хол}$  соответственно с помощью элементов Пельтье размером 3 см  $\times$  3 см. Ячейка с элементами Пельтье крепится к линейному мотору, который совершает поступательные гармонические колебания в направлении оси  $X$  (перпендикулярно градиенту температуры). Характеристики линейного мотора будут описаны ниже в пункте 8.1.3.

Термовибрационные течения регистрируются путем наблюдения поля температур в ячейке с помощью цифровой оптической интерферометрии [108] на основе интерферометра Маха–Цендера, см. рис. 8.1 (а). Луч гелий–неонового

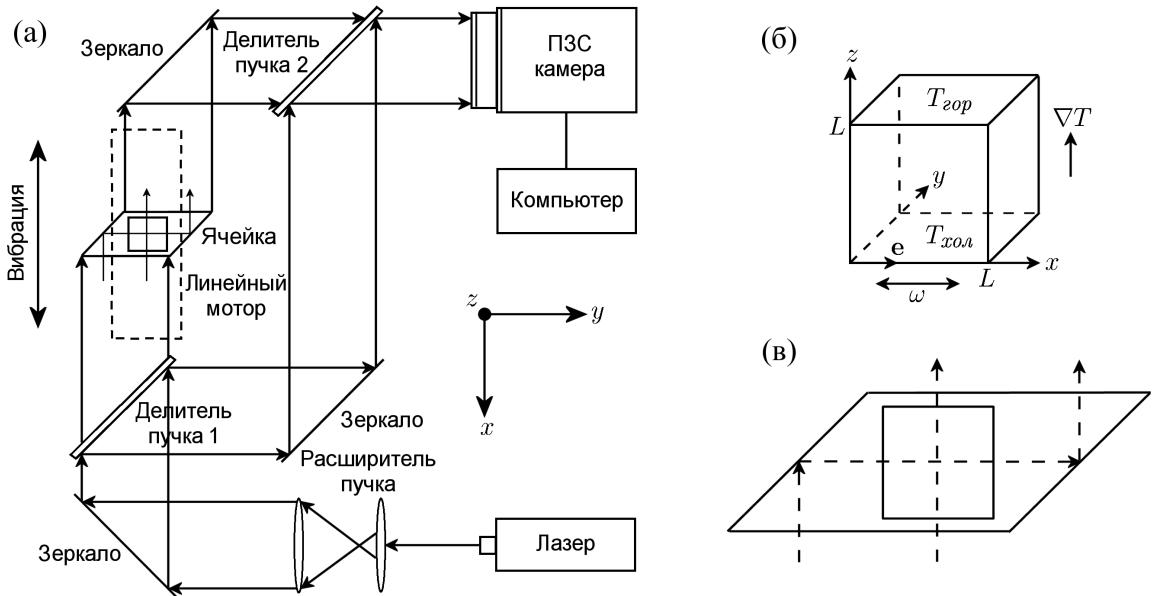


Рис. 8.1. (а) Схема экспериментальной установки, (б) кубическая полость, (в) ход лучей в полости (вид сверху).

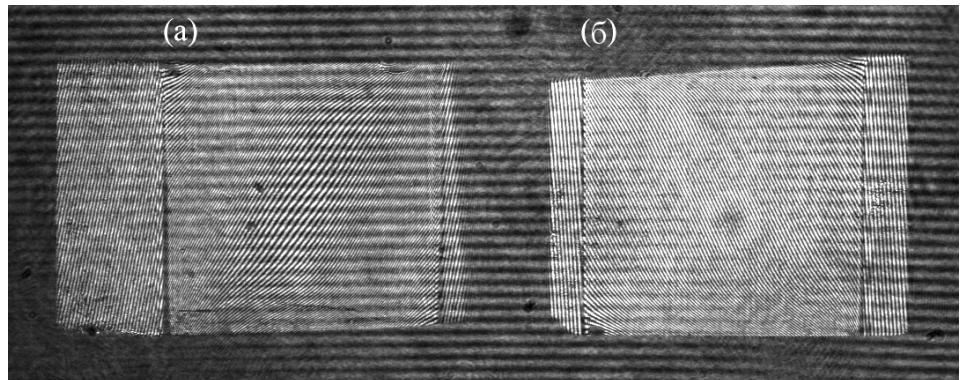


Рис. 8.2. Наблюдаемая интерференционная картина: (а) вид сбоку, (б) вид спереди.

лазера с длиной волны 632.8 нм после расширения и коллимации поступает на делитель пучка 1, где разделяется на два пучка одинаковой интенсивности. Один пучок проходит через ячейку с рабочей жидкостью в двух перпендикулярных направлениях благодаря наличию призм. Это позволяет получить изображение внутреннего объема ячейки в плоскостях  $yz$  (вид спереди) и  $xz$  (вид сбоку). Путь лучей в ячейке показан на рис. 8.1 (в). Неоднородности температуры в жидкости приводят к неоднородному распределению показателя преломления, что, в свою очередь, вызывает пространственную неоднородность фазы пучка лучей. Возмущенный пучек лучей интерферирует

с невозмущенным (опорным) пучком лучей на делителе пучка 2. В результате получается интерференционная картина, пример которой показан на рис. 8.2. Полученные изображения записываются с помощью ПЗС камеры с разрешением  $1280 \times 1024$  пикселя со скоростью 24 кадра в секунду. Компьютерная обработка интерференционных картин позволяет определить сдвиг фазы, на основе которого определяется пространственное распределение показателя преломления. Зависимость показателя преломления от температуры позволяет восстановить двумерные проекции поля температур на плоскости  $yz$  и  $xz$ . Точность измерения температуры с помощью данного метода составляет 0.01 К. Алгоритм обработки интерференционных картин подробно описан в работе [108]. В качестве дополнительного метода обнаружения термовибрационных течений используется отслеживание траекторий небольшого количества твердых частиц радиуса  $75 \pm 20$  мкм, помещенных в рабочую жидкость.

Эксперименты проводились в параболических полетах на самолете Airbus A300 во время 46 и 48 кампаний, организованных Европейским космическим агентством в ноябре 2007 г. и марте 2008 г. соответственно. Полет по параболической траектории позволяет создать состояние пониженной гравитации ( $g \sim 10^{-2}g_0$ , где  $g_0 = -9.81$  м/с<sup>2</sup>) длительностью около 20 секунд. Этому состоянию предшествует и за этим состоянием следует период гипергравитации ( $g \sim 1.8g_0$ ) длительностью около 20 секунд. Каждая кампания состоит из трех полетов, в каждом из которых выполняется 31 парабола. На рис. 8.3 (а) показана типичная зависимость компонент вектора ускорения от времени при выполнении одной параболы. Период низкой гравитации показан отдельно на рис. 8.3 (б). Уровень остаточных ускорений в параболическом полете удовлетворяет соотношениям

$$|g_x|, |g_y| \leq 10^{-2}g_0, \quad |g_z| \leq 5 \times 10^{-2}g_0.$$

Здесь оси  $x$  и  $y$  лежат в плоскости крыльев самолета, при этом положительное направление оси  $x$  соответствует направлению от хвоста к носу самолета. Ось  $z$  перпендикулярна плоскости крыльев и направлена вертикально вверх. Экспериментальное оборудование было помещено в специально оборудованный

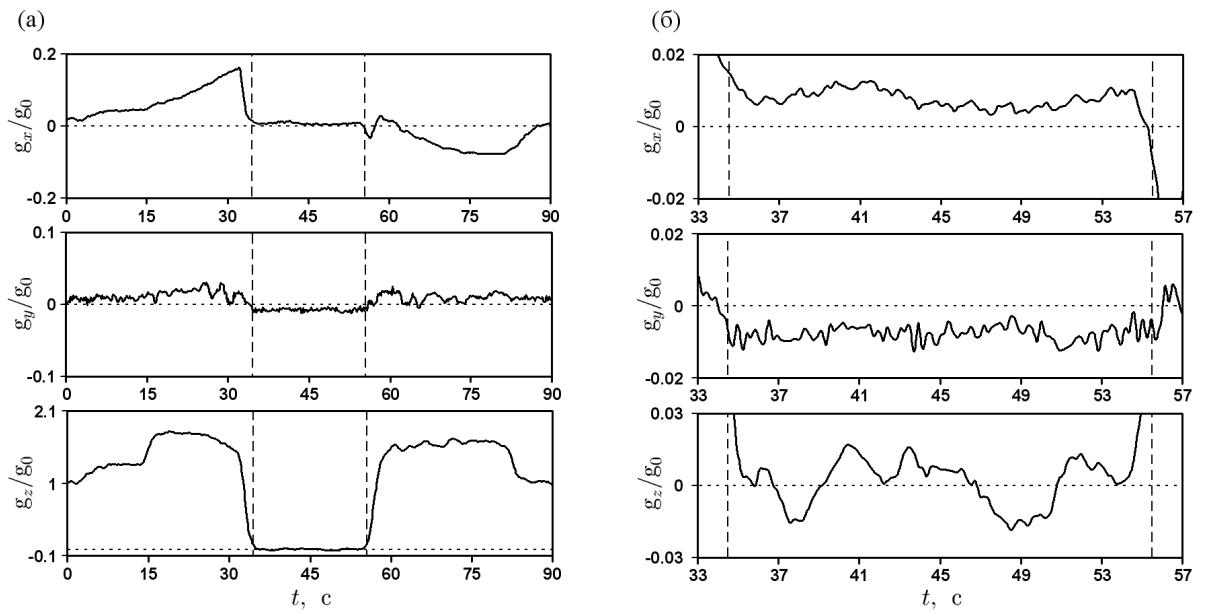


Рис. 8.3. (а) Зависимость компонент вектора ускорения от времени в параболическом полете. (б) То же самое в период низкой гравитации.

каркас и установлено в самолете. Ориентация ячейки относительно координатной системы, описанной выше, показана на рис. 8.1 (б). Уровень гравитации во время полета измерялся с помощью акселерометра с частотой дискретизации 5 Гц, расположенного на каркасе установки.

Каждый сеанс эксперимента осуществлялся в следующем порядке. Во время горизонтального полета в ячейке устанавливался градиент температуры. Для подавления гравитационной конвекции ячейка нагревалась сверху и охлаждалась снизу, таким образом градиент температуры был направлен противоположно вектору силы тяжести, см. рис. 8.1 (б). Вибрация с заданной частотой и амплитудой включалась в начале периода низкой гравитации и продолжалась в течение 25 секунд. В это время происходила запись интерференционных картин. Интервал времени между последовательными параболами составлял около 2 минут. Большое число парабол (93 в каждой кампании) позволило исследовать различные вибрационные режимы, а также осуществить повторение сеансов с одинаковыми параметрами. Выбор рабочей жидкости и параметров эксперимента будет подробно обсужден в пункте 8.1.3.

### 8.1.2 Математическое моделирование

Для математического моделирования термовибрационной конвекции в условиях эксперимента, описанных выше, используется два подхода. Первый подход основан на численном решении полных уравнений Навье–Стокса и переноса тепла в трехмерной постановке с учетом вибрационного воздействия и переменных остаточных ускорений. Это необходимо для наиболее точного со-поставления экспериментальных и численных результатов. Во втором подходе решаются двумерные осредненные уравнения термовибрационной конвекции. Этот подход используется для изучения влияния интенсивности вибрации и уровня остаточных ускорений на поведение системы.

**Полные уравнения Навье–Стокса и переноса тепла.** Рассмотрим кубическую ячейку, совершающую поступательные гармонические колебания с заданной частотой  $f$  и амплитудой  $A$  в направлении оси  $x$ , см. рис. 8.1 (б). В координатной системе, связанной с движущейся ячейкой, ускорение, действующее на систему, можно записать в виде

$$\mathbf{g}(t) + A\omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{e},$$

где  $\mathbf{g}(t) = (g_x(t), g_y(t), g_z(t))$  — вектор ускорений, зависящий от времени,  $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$  — единичный вектор, определяющий направление вибрации,  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота. Будем предполагать, что справедливо приближение Буссинеска

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_T(T - T_0)).$$

Здесь  $T_0 = (T_{\text{гор}} + T_{\text{хол}})/2$  — средняя температура,  $\rho_0$  — плотность смеси при средней температуре. Уравнения движения жидкости имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\rho_0^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \\ &+ (1 - \beta_T(T - T_0)) (\mathbf{g}(t) + A\omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{e}), \\ \partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \chi \nabla^2 T, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Анализ применимости приближения Буссинеска для описания движения жидкости под действием вибрации проведен в работе [80].

Определим модифицированное давление

$$\tilde{p} = p - \rho_0(\mathbf{g}(t) + A\omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{e}) \cdot \mathbf{x}, \quad (8.2)$$

где  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} t &= \frac{L^2}{\nu} t^*, & \mathbf{x} &= L \mathbf{x}^*, & \mathbf{u} &= \frac{\nu}{L} \mathbf{u}^*, \\ \tilde{p} &= \rho_0 \frac{\nu^2}{L^2} p^*, & T - T_0 &= \Delta T T^*, \end{aligned} \quad (8.3)$$

где  $\Delta T = T_{\text{гор}} - T_{\text{хол}}$  — приложенная разность температур. Опуская для простоты верхние индексы у безразмерных переменных, запишем уравнения движения в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} - \text{Pr}^{-1} (\mathbf{Ra}(t) + \text{Ra}_{os} \cos(\Omega t) \mathbf{e}) T, \\ \partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \text{Pr}^{-1} \nabla^2 T, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Система содержит следующие безразмерные параметры: число Прандтля  $\text{Pr}$ , число Рэлея  $\mathbf{Ra}(t) = (\text{Ra}_x(t), \text{Ra}_y(t), \text{Ra}_z(t))$ , колебательное число Рэлея  $\text{Ra}_{os}$  и безразмерную круговую частоту  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \text{Pr} &= \frac{\nu}{\chi}, & \Omega &= \frac{\omega L^2}{\nu}, \\ \text{Ra}_{x,y,z}(t) &= \frac{g_{x,y,z}(t) \beta_T \Delta T L^3}{\nu \chi}, & \text{Ra}_{os} &= \frac{A \omega^2 \beta_T \Delta T L^3}{\nu \chi}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

На стенках ячейки ставятся условия прилипания для скорости. Верхняя и нижняя стенка поддерживаются при постоянных температурах  $T_{\text{гор}}$  и  $T_{\text{хол}}$  соответственно. Границные условия в безразмерных переменных записываются следующим образом

$$x, y, z = 0, 1 : \quad \mathbf{u} = 0; \quad z = 0 : \quad T = -\frac{1}{2}; \quad z = 1 : \quad T = \frac{1}{2}. \quad (8.6)$$

Для постановки условий для температуры на боковых стенках обратимся к экспериментальным измерениям. На рис. 8.4 (а) показан профиль температуры на боковой стенке  $x = 0$ , в то время как на рис. 8.4 (б) представлен

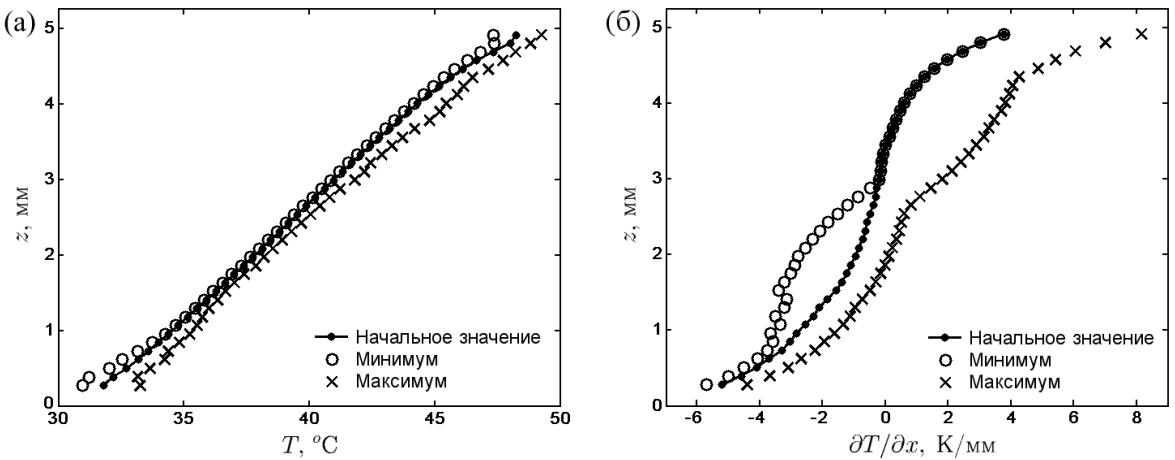


Рис. 8.4. Профили температуры (а) и градиента температуры (б) на стенке  $x = 0$ . Показаны начальные, минимальные и максимальные значения в течение одного сеанса эксперимента. Рабочая жидкость – изопропанол.

градиент температуры, пропорциональный потоку тепла через стенку (в размерных переменных). Эксперимент показывает, что поток тепла изменяется со временем и существенно отличен от нуля. В то же время, распределение температуры на стенке близко к линейному и слабо зависит от времени. Поэтому на боковых стенках задается линейный профиль температуры:

$$x, y = 0, 1 : \quad T = z - \frac{1}{2}. \quad (8.7)$$

Распределение температуры устанавливается задолго до начала вибрации, поэтому в качестве начальных условий берутся следующие

$$t = 0 : \quad \mathbf{u} = 0, \quad T = z - \frac{1}{2}. \quad (8.8)$$

Для количественной оценки переноса тепла, вызванного вибрационной конвекцией, введем безразмерный тепловой поток (число Нуссельта) согласно формуле

$$\text{Nu}(t) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \left| \frac{\partial T}{\partial n} \right| dS. \quad (8.9)$$

Здесь  $\partial T / \partial n = \nabla T \cdot \mathbf{n}$  – нормальная составляющая градиента температуры,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к границе ячейки  $\Gamma$ . В случае чисто диффузационного переноса тепла  $\text{Nu} = 1$ . Число Нуссельта характеризует безразмерное количество теплоты, переносимое через жидкий объем в ячейке.

Для того, чтобы это показать, введем два числа Нуссельта

$$\text{Nu}^+ = \oint_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n} dS \quad \left( \frac{\partial T}{\partial n} > 0 \right), \quad \text{Nu}^- = \oint_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n} dS \quad \left( \frac{\partial T}{\partial n} < 0 \right),$$

которые характеризуют приток и отток тепла через границу области соответственно. В предположении отсутствия внутренних источников тепла и пренебрежимо малого тепловыделения в результате вязкой диссипации, будем иметь  $\text{Nu}^+ + \text{Nu}^- = 0$ . Отсюда следует

$$\text{Nu} = \frac{1}{2} (\text{Nu}^+ - \text{Nu}^-) = \text{Nu}^+ = -\text{Nu}^-.$$

Для численного решения задачи (8.4)–(8.8) использовался метод конечных объемов на равномерной разнесенной сетке. Давление и температура вычислялись в центрах контрольных объемов, в то время как компоненты скорости рассчитывались в центрах граней контрольных объемов. Использовалась явная схема первого порядка точности по времени на основе разности вперед. Дискретизация по пространству имела второй порядок точности. Расчет скорости и давления производился проекционным методом. По известным значениям скорости и температуры на предыдущем шаге по времени вычислялось промежуточное значение скорости из уравнения импульса без учета градиента давления. Для расчета скорости на следующем шаге по времени учитывался градиент давления. Расчет давления производился путем решения уравнения Пуассона, получаемого из условия соленоидальности вектора скорости. Дискретизация уравнения Пуассона проводилась с помощью быстрого преобразования Фурье в направлении  $y$  и неявной схемы переменных направлений в направлениях  $x$  и  $z$ . Уравнение Пуассона решалось итерационным методом. Границные условия для давления получались проектированием уравнения импульса на нормаль к границе области. После вычисления скорости производился расчет температуры на следующем шаге по времени из уравнения переноса тепла.

Для тестирования численного метода производились расчеты на различных сетках и шагах по времени. Более подробную информацию об этом можно найти в работе [79]. В результате была выбрана равномерная сетка  $32 \times 33 \times 32$

и шаг по безразмерному времени  $10^{-4}$ . Показано, что дальнейшее увеличение количества узлов и уменьшение шага по времени практически не влияют на точность расчета.

**Осредненные уравнения.** В случае вибрации высокой частоты и малой амплитуды для описания термовибрационных течений может быть эффективно использован метод осреднения [45, 46].

Обозначим период колебаний через  $\tau = 2\pi/\omega$ . В методе осреднения поля скорости, давления и температуры представляются в виде суммы двух компонент — осредненной и пульсационной:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad \tilde{p} = \bar{p} + p', \quad T - T_0 = \bar{T} + T'. \quad (8.10)$$

Здесь модифицированное давление  $\tilde{p}$  дается формулой (8.2). Осредненные компоненты определяются по формулам

$$(\bar{\mathbf{u}}(t), \bar{p}(t), \bar{T}(t)) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} (\mathbf{u}(\tau'), p(\tau'), T(\tau')) d\tau', \quad (8.11)$$

а пульсационные компоненты представляют собой разность исходных величин и их осредненных компонент согласно (8.10).

В основе метода осреднения лежат следующие предположения:

1. Период колебаний много меньше характерных времен системы:

$$\begin{aligned} \tau &\ll \tau_\nu, \quad \tau \ll \tau_\chi, \quad \tau \ll \tau_g, \\ \tau_\nu &= L^2/\nu, \quad \tau_\chi = L^2/\chi, \quad \tau_g = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g\beta_T\Delta T}}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Здесь  $\tau_\nu$  — вязкое время,  $\tau_\chi$  — тепловое время. Последнее неравенство в (8.12) является следствием предположения о том, что сила плавучести, вызванная колебаниями температуры в поле силы тяжести, много меньше соответствующей силы плавучести в вибрационном поле.

2. Амплитуда колебаний удовлетворяет неравенству

$$A \ll A_L = \frac{L}{\beta_T\Delta T}. \quad (8.13)$$

Это неравенство следует из предположения о том, что смещение частиц жидкости в течение одного периода колебаний много меньше характерного размера области.

Вывод осредненных уравнений термовибрационной конвекции подробно описан в [46], а также в [80] на основании более строгого подхода с математической точки зрения. Уравнения для осредненных компонент имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} &= -\rho_0^{-1} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \beta_T \bar{T} \mathbf{g} + \frac{(\beta_T A \omega)^2}{2} ((\bar{T} \mathbf{e} - \nabla F) \cdot \nabla) \nabla F, \\ \partial_t \bar{T} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{T} &= \chi \nabla^2 \bar{T}, \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} &= 0, \\ \nabla^2 F - \nabla \bar{T} \cdot \mathbf{e} &= 0, \end{aligned} \quad (8.14)$$

а пульсационные компоненты определяются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= -\beta_T A \omega \sin(\omega t) \mathbf{w}, & p' &= -\rho_0 \beta_T A \omega^2 \cos(\omega t) F, \\ T' &= -\beta_T A \cos(\omega t) \mathbf{w} \cdot \nabla \bar{T}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Вектор  $\mathbf{w}$  и функция  $F$ , характеризующие амплитуды колебаний скорости и давления соответственно, связаны с разложением вектора  $\bar{T} \mathbf{e}$  на безвихревой вектор  $\nabla F$  и соленоидальный вектор  $\mathbf{w}$  с нулевой проекцией на нормаль  $\mathbf{n}$  к границе области  $\Gamma$ :

$$\bar{T} \mathbf{e} = \mathbf{w} + \nabla F, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \quad (8.16)$$

Отсюда следует граничное условие на функцию  $F$ :

$$(\nabla F - \bar{T} \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0.$$

В численном моделировании на основе метода осреднения рассматривается двумерная задача об осредненных течениях в квадратной ячейке (плоскость  $xz$  на рис. 8.1). Основной целью является изучения влияния интенсивности вибрации и уровня остаточных ускорений на поведение системы в широкой области параметров. Граничные условия для осредненной скорости и температуры совпадают с (8.6), (8.7). Безразмерные переменные вводятся по формулам, аналогичным (8.3), а безразмерная амплитуда колебаний давления

определяется согласно  $f = F(\Delta TL)^{-1}$ . Двумерные уравнения решаются в терминах функция тока  $\varphi$  — завихренность  $\zeta$ , которые определяются формулами

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{w}) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad \zeta = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}.$$

Осредненные уравнения (8.14) в безразмерных переменных принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \nabla^2 \zeta + \\ &+ \frac{1}{\text{Pr}} \left[ \text{Ra}_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} - \text{Ra}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \text{Gs} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \right], \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 \bar{T}, \\ \nabla^2 f &= \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}, \\ \nabla^2 \varphi &= -\zeta. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Границные условия задачи записываются следующим образом

$$\begin{aligned} x = 0, 1 : \quad \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \bar{T} = z - \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \bar{T}, \\ z = 0, 1 : \quad \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \bar{T} = \mp \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{8.18}$$

в то время как начальные условия имеют вид

$$t = 0 : \quad \varphi = \zeta = 0, \quad \bar{T} = z - \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \bar{T}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{8.19}$$

Последние два условия следуют из (8.16), где следует положить  $\mathbf{w} = 0$  в начальный момент времени.

Уравнения (8.17) содержат числа Рэлея  $\text{Ra}_x$  и  $\text{Ra}_z$ , которые определяются согласно (8.5) и характеризуют интенсивность конвекции, вызванной остаточными ускорениями. В отличие от полных уравнений (8.4), в осредненных уравнениях предполагается, что ускорения  $g_x$  и  $g_z$  являются постоянными. Вибрационный аналог числа Рэлея

$$\text{Gs} = \frac{(A\omega\beta_T\Delta TL)^2}{2\nu\chi}$$

характеризует интенсивность вибрационного механизма конвекции, приводящего к появлению осредненных течений. В работе [204] и последующих работах [73, 78, 79] было предложено называть этот параметр *числом Гершуни* вместо вибрационного числа Рэлея для того, чтобы отметить большой вклад Г.З. Гершуни в теорию вибрационной конвекции [46]. Этой терминологии мы будем придерживаться в дальнейшем. Число Гершуни связано с колебательным числом Рэлея  $\text{Ra}_{os}$  и безразмерной частотой  $\Omega$  (см. (8.5)) формулой

$$G_s = \frac{1}{2\text{Pr}} \left( \frac{\text{Ra}_{os}}{\Omega} \right)^2.$$

Задача (8.17)–(8.19) решалась численно методом конечных разностей на равномерной сетке. Использовалась явная схема первого порядка точности по времени на основе разности вперед. Аппроксимация пространственных производных производилась с помощью центральных разностей, имеющих второй порядок точности. Для расчетов использовалась неявная схема переменных направлений. Уравнения Пуассона для функции тока  $\varphi$  и амплитуды колебаний давления  $f$  решались итерационным методом. Тестирование численного метода проводилось на различных сетках и шагах по времени. Более подробную информацию можно найти в работе [79]. В результате была выбрана равномерная сетка  $76 \times 76$  и шаг по безразмерному времени  $10^{-5}$ .

Для изучения переходного процесса в ячейке удобно ввести интегральную характеристику поля скорости в данный момент времени. В численном расчете такой характеристикой является сумма значений функции тока в узлах сетки

$$\Phi(t) = \sum_{i,k} \varphi_{ik}, \quad (8.20)$$

которая пропорциональна полному моменту количества движения жидкости.

### 8.1.3 Выбор параметров эксперимента

При постановке эксперимента по изучению термовибрационных течений в условиях низкой гравитации возникает задача выбора рабочей жидкости, размера ячейки, параметров вибрации и приложенной разности температур. Этот выбор осуществлялся исходя из следующих критериев:

1. Термовибрационный механизм конвекции должен быть доминирующим по сравнению с механизмом конвекции, связанном с остаточными ускорениями. Относительная интенсивность этих механизмов характеризуется отношением

$$\frac{G_s}{Ra_{x,y,z}} = \frac{(A\omega)^2 \beta_T \Delta T}{2g_{x,y,z} L}.$$

Отсюда следует, что скорость колебаний, коэффициент теплового расширения и разность температур должны быть как можно больше, а размер ячейки и величины остаточных ускорений — как можно меньше. Типичный уровень остаточных ускорений в параболическом полете соответствует  $g_{x,y}/g_0 = 0.01$ ,  $g_z/g_0 = 0.02$ , см. рис. 8.3.

2. Для наблюдения осредненных течений, возникающих под действием колебаний высокой частоты и малой амплитуды, параметры эксперимента должны удовлетворять неравенствам (8.12), (8.13).

3. Время существования низкой гравитации в параболическом полете (20 с) должно быть достаточным для развития осредненного течения в ячейке. Таким образом, характерные вязкое и тепловое времена (или хотя бы первое из них) должны быть сравнимы с указанным выше временем.

4. Размер ячейки должен быть достаточно большим для того, чтобы обеспечить возможность наблюдения методом оптической интерферометрии.

5. Частота колебаний должна быть кратна 24 для регистрации интерферограмм через равные промежутки времени. Заметим, что ячейка находится в фокусе камеры только при прохождении через центр вибрационного стола линейного мотора.

6. Рабочая жидкость и экспериментальная установка в целом должны удовлетворять требованиям безопасности при проведении параболических полетов.

На основании вышеуказанных критериев был выбран размер ячейки  $L = 5$  мм.

Для создания вибрации использовался линейный мотор с максимальной амплитудой колебаний 15 мм. Рабочие области мотора в пространстве параболической траектории

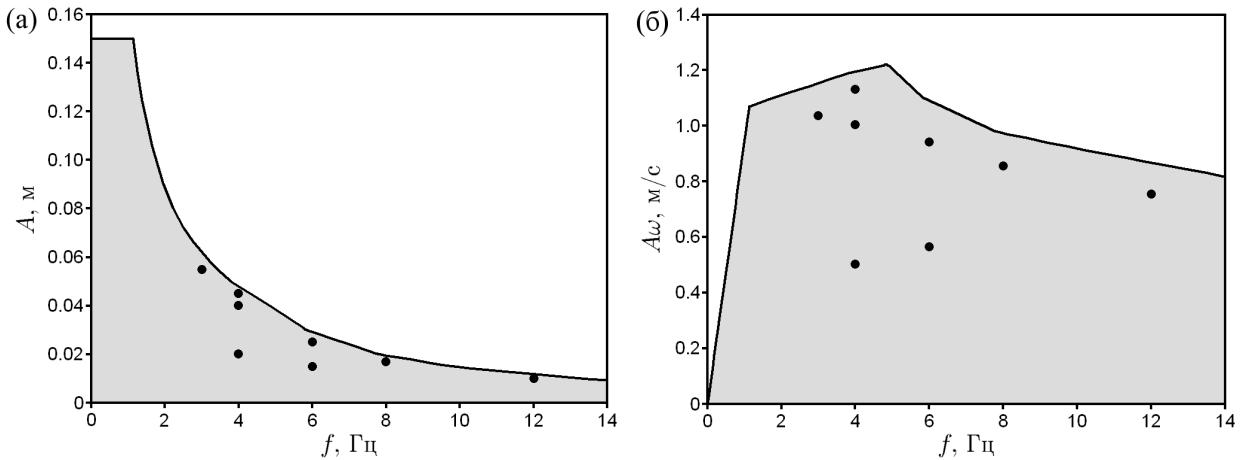


Рис. 8.5. Рабочие области линейного мотора в пространстве параметров частота — амплитуда колебаний (а) и частота — скорость колебаний (б). Точки соответствуют случаям, реализованным в эксперименте.

метров частота — амплитуда колебаний и частота — скорость колебаний показаны на рис. 8.5. Точками отмечены экспериментально реализованные случаи. Среди этих случаев максимальная скорость колебаний  $A\omega = 1.131$  м/с достигается при  $f = 4$  Гц,  $A = 45$  мм. Максимальное ускорение колебаний  $A\omega^2 = 5.8g_0$  соответствует  $f = 12$  Гц,  $A = 10$  мм.

Средняя температура жидкости в эксперименте была  $T_0 = 40^\circ\text{C}$ . Использовались две разности температур — 15 К и 20 К. Эти параметры выбирались исходя из критериев 1 и 2 (см. выше). Разность температур была выбрана таким образом, чтобы уравнения движения (8.1) и (8.14) с постоянными физическими свойствами, соответствующими средней температуре, адекватно описывали термовибрационные течения. Заметим также, что для устойчивой работы элементов Пельтье необходимо, чтобы минимальная температура нижней стенки ( $30^\circ\text{C}$ ) была выше температуры в салоне самолета.

Сравнительный анализ различных параметров для нескольких жидкостей (вода, этанол, метанол, изопропанол, трансформаторное масло) приведен в Таблице 8.1 для максимальных значений скорости колебаний и разности температур. Заметим, что трансформаторное масло использовалось в экспериментах по термовибрационной конвекции в работах [194, 195]. Из рассмотренных жидкостей наиболее подходящим является изопропанол. Вязкое время для

Таблица 8.1. Физические свойства, характерные времена и значения безразмерных параметров для различных жидкостей при  $T_0 = 40^\circ\text{C}$ . Параметры:  $L = 5 \text{ мм}$ ,  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ ,  $A\omega = 1.131 \text{ м/c}$ ,  $g_{x,y}/g_0 = 0.01$ ,  $g_z/g_0 = 0.02$ .

Жидкость	$\rho$ кг/м <sup>3</sup>	$\beta_T \times 10^3$ 1/К	$\nu \times 10^6$ м <sup>2</sup> /с	$\kappa$ Вт/м·К	$\chi \times 10^7$ м <sup>2</sup> /с	$\tau_\nu$ с	$\tau_\chi$ с	$\tau_g$ с	$A_L$ ММ	$\Pr$	$G_S$	$G_S / G_s$	$\text{Ra}_{x,y}$	$\text{Ra}_z$	Источник
Вода	992.2	0.383	0.658	0.631	1.521	38.0	164.4	11.5	650	4.3	9373	10.0	5.0	[301]	
Этанол	772.0	1.134	1.067	0.159	0.794	23.4	314.9	6.7	220	13.4	97054	29.6	14.8	[281]	
Метанол	772.2	1.230	0.581	0.187	0.919	43.0	271.9	6.4	200	6.3	181214	32.1	16.0	[323]	
Изопропанол	768.7	1.095	1.730	0.131	0.623	14.5	401.3	6.8	230	27.8	71149	28.6	14.3	[280, 324]	
Грансформаторное масло	868.2	0.700	10.297	0.109	0.702	2.4	356.0	8.5	360	146.6	4334	18.3	9.1	[325]	

Таблица 8.2. Список сеансов эксперимента в условиях низкой гравитации. Числа Гершуни и Рэлея соответствуют значениям ускорений  $g_{x,y}/g_0 = 0.01$ ,  $g_z/g_0 = 0.02$ .

№	$f$ , Гц	A, мм	$\Delta T$ , °C	Gs	Gs/Ra <sub>x,y</sub>	Gs/Ra <sub>z</sub>	Кол-во сеансов
1	0	0	15	0	0	0	1
2	0	0	20	0	0	0	3
3	4	20	15	7905	4.23	2.12	2
4	6	15	15	10005	5.35	2.68	2
5	4	20	20	14054	5.64	2.82	2
6	12	10	15	17787	9.52	4.76	2
7	6	15	20	17787	7.14	3.57	2
8	12	10	20	31622	12.69	6.35	2
9	3	55	15	33629	18.00	9.00	2
10	4	45	15	40021	21.42	10.71	2
11	8	17	20	40616	16.30	8.15	4
12	6	25	20	49409	19.83	9.91	4
13	4	40	20	56216	22.56	11.28	3
14	3	55	20	59785	23.99	12.00	2
15	4	45	20	71149	28.55	14.28	2

Таблица 8.3. Список сеансов эксперимента в условиях нормальной гравитации:  
 $g_{x,y}/g_0 = 0$ ,  $g_z/g_0 = 1$ .

№	$f$ , Гц	A, мм	$\Delta T$ , °C	Gs	Gs/Ra <sub>x,y</sub>	Gs/Ra <sub>z</sub>	Кол-во сеансов
1	8	17	20	40616	—	0.16	2
2	4	40	20	56216	—	0.23	2

данной жидкости меньше 20 секунд, максимальное значение числа Гершуни достаточно велико, а значение отношений последнего к числам Рэлея позволяет говорить о том, что термовибрационный механизм конвекции является доминирующим. Заметим, что тепловое время для всех жидкостей значительно больше 20 секунд. Поэтому в экспериментах можно наблюдать лишь начальный этап развития термовибрационной конвекции. Как показывают экспериментальные и численные результаты (см. ниже), этого достаточно для изучения основных закономерностей процесса.

В Таблицах 8.2 и 8.3 приведен перечень сеансов эксперимента в условиях низкой и нормальной гравитации соответственно. Результаты экспериментов будут описаны в пунктах 8.1.5—8.1.7.

#### 8.1.4 Влияние остаточных ускорений на режимы течения

Обзор литературы в области вибрационной конвекции, проведенный в параграфе 1.3, показывает, что имеется большое количество теоретических работ, посвященных изучению структуры осредненных течений. В монографии [46] установлено, что в условиях невесомости ненулевое осредненное течение в квадратной полости существует при любом положительном значении числа Гершуни  $G_s$ , если направление вибрации перпендикулярно градиенту температуры (именно такая конфигурация рассматривается в настоящей работе). При небольших значениях числа Гершуни стационарное осредненное течение имеет симметричную *четырехвихревую* структуру, см. рис. 8.6 слева [46, 48, 191]. При превышении числом Гершуни некоторого критического значения  $G_{s_{cr}}$  происходит смена режима — возникает структура из одного большого вихря в диагональном направлении и двух маленьких вихрей в углах полости, см. рис. 8.6 справа. Эту структуру в дальнейшем будем называть *трехвихревой*. Критическое значение числа Гершуни зависит от физических свойств жидкости (числа Прандтля) и граничных условий на боковых стенах. Согласно [46],  $G_{s_{cr}} = 8 \times 10^3$  для адиабатических стенок и  $G_{s_{cr}} = 15 \times 10^3$  для теплопроводных стенок (с линейным профилем температуры). В первом

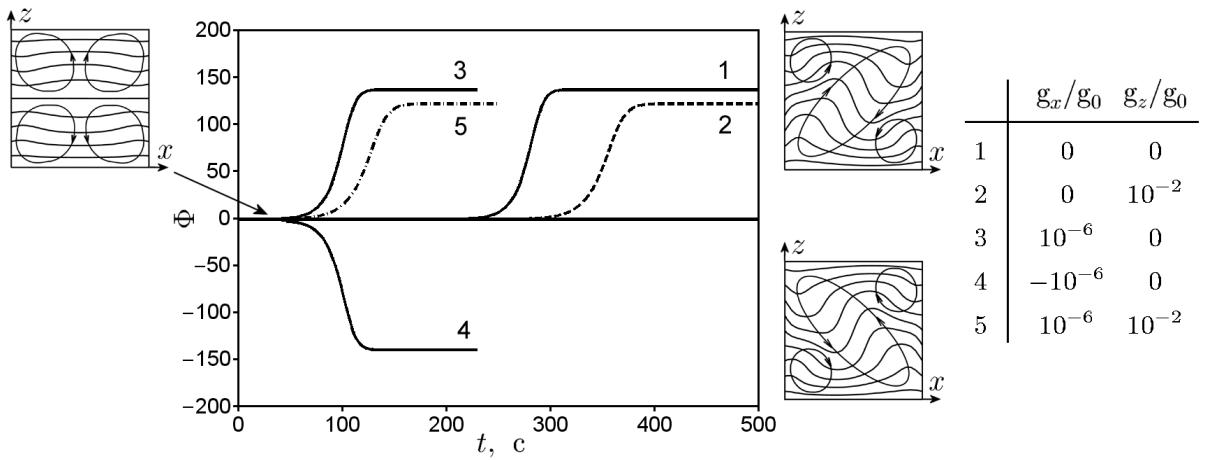


Рис. 8.6. Зависимость суммы значений функции тока от времени для различных уровней остаточных ускорений и соответствующие структуры осредненного течения,  $G_s = 71149$ .

случае критическое значение не зависит от числа Прандтля, во втором случае указанное значение соответствует  $Pr = 1$ . Заметим, что при  $G_s > G_{s_{cr}}$  четырехвихревой режим является метастабильным и существует в течение некоторого времени с момента начала вибрации. С течением времени происходит переход к устойчивому трехвихревому режиму. Время установления этого режима зависит от значений  $Pr$ ,  $G_s$ ,  $Ra_{x,y,z}$  и граничных условий на боковых стенках.

Во время подготовки к эксперименту, а также при обработке полученных результатов было проведено численное моделирование термовибрационной конвекции в широком диапазоне параметров. Целью этих исследований было понимание того, какие режимы осредненных течений можно наблюдать в течение 20 секунд низкой гравитации. Кроме этого, необходимо было исследовать влияние остаточных ускорений на развитие осредненных течений, их структуру и перенос тепла в ячейке. Численные расчеты были проведены для квадратной ячейки на основе осредненных уравнений (8.17), граничных условий (8.18) и начальных условий (8.19). Последние соответствуют началу периода низкой гравитации в эксперименте. В качестве рабочей жидкости использовался изопропанол, физические свойства которого вместе с безразмерными параметрами приведены в Таблице 8.1. Приложенная разность температур соответствовала  $\Delta T = 20$  К. В указанных условиях числа Рэлея полностью

определяются величиной остаточных ускорений

$$Ra_{x,y,z} = \frac{g_{x,y,z} \beta_T \Delta T L^3}{\nu \chi} = 249166 g_{x,y,z}/g_0,$$

в то время как число Гершуни  $Gs$  определяется скоростью колебаний  $A\omega$ .

Для изучения переходного процесса были взяты параметры, соответствующие максимальному значению числа Гершуни для рассматриваемой системы:  $f = 4$  Гц,  $A = 45$  мм,  $\Delta T = 20$  К,  $Gs = 71149$  (сесанс 15 в Таблице 8.2). Зависимость суммы значений функции тока (8.20) от времени для различного уровня остаточных ускорений показана на рис. 8.6. Когда  $\Phi$  близко к нулю, осредненное течение имеет четырехвихревую структуру. По прошествии некоторого времени, абсолютная величина  $\Phi$  начинает расти и постепенно достигает стационарного значения. Увеличение  $\Phi$  соответствует переходу к трехвихревой структуре. Визуальный анализ показывает, что этот режим устанавливается при

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\infty)} > 0.25,$$

где  $\Phi(\infty)$  есть стационарное значение. На основе этого критерия можно определить время жизни четырехвихревого режима как время, в течение которого  $\Phi(t)/\Phi(\infty) < 0.25$ .

Кривая 1 на рис. 8.6 соответствует полной невесомости. Остаточные ускорения в направлении оси  $z$  дестабилизируют (стабилизируют) течение, если направления вектора ускорений и градиента температуры совпадают (противоположны). Заметим, что градиент температуры всегда сонаправлен с осью  $z$ . Кривая 2 соответствует стабилизирующему влиянию остаточного ускорения  $g_z/g_0 = 10^{-2}$ , которое приводит к задержке переходного процесса от четырехвихревого к трехвихревому режиму. Остаточное ускорение в направлении оси  $x$  всегда дестабилизирует систему. Как видно из рис. 8.6, даже очень малый уровень ускорения  $g_x/g_0 = 10^{-6}$  существенно снижает время жизни метастабильного четырехвихревого режима (кривая 3). Заметим, что в этом случае отношение числа Гершуни к числу Рэлея достаточно большое:  $Gs/Ra_x = 2.855 \times 10^5$ . Знак  $g_x/g_0$  определяет наклон диагонального вихря и направление вращения в стационарном состоянии (см. кривые 3 и 4). Кривая

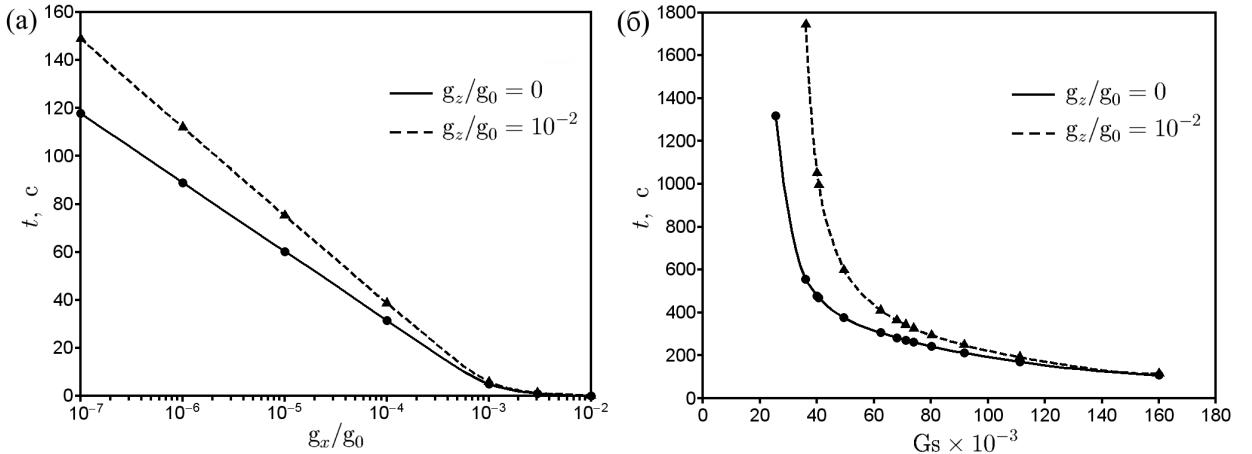


Рис. 8.7. (а) Зависимость времени жизни четырехвихревого режима от уровня остаточного ускорения  $g_x/g_0$  при  $G_s = 71149$ . (б) Зависимость времени жизни четырехвихревого режима от числа Гершуни при  $g_x/g_0 = 0$ .

$g_x/g_0 =$	0	$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$3 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$
$g_z/g_0 = 0$	271.3	117.8	88.9	60.0	31.3	5.02	1.05	0.10
$g_z/g_0 = 10^{-2}$	342.3	148.8	112.0	75.1	38.6	5.85	1.18	0.13

Таблица 8.4. Время жизни (в секундах) четырехвихревого режима при различных уровнях остаточных ускорений,  $G_s = 71149$ , см. рис. 8.7 (а).

5 соответствует дестабилизирующему влиянию  $g_x/g_0$  и стабилизирующему влиянию  $g_z/g_0 = 10^{-2}$ , при этом  $G_s/Ra_z = 28.55$ .

Зависимость времени жизни четырехвихревого режима от уровня остаточного ускорения  $g_x/g_0$  показана на рис. 8.7 (а). Значения, соответствующие точкам данного графика, представлены в Таблице 8.4. Как видно, время жизни резко уменьшается с увеличением  $g_x/g_0$ . При изменении этой величины от  $10^{-7}$  до  $10^{-2}$  отношение  $G_s/Ra_x$  изменяется от  $2.855 \times 10^6$  до 28.55. Стабилизирующее влияние остаточного ускорения  $g_z/g_0 = 10^{-2}$  увеличивает время жизни режима из четырех вихрей. Однако, влияние этого фактора ослабевает с ростом  $g_x/g_0$ . На рис. 8.7 (б) представлена зависимость времени жизни четырехвихревого режима от числа Гершуни. С ростом  $G_s$  время жизни метастабильного режима уменьшается и трехвихревой режим устанавливается быстрее. Стабилизирующее влияние  $g_z/g_0$  задерживает переход к последнему

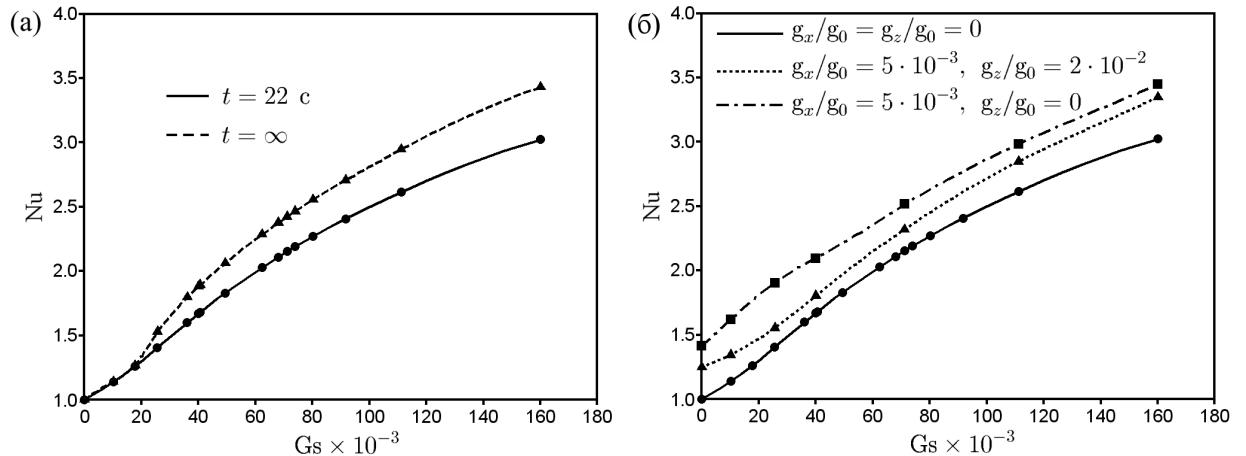


Рис. 8.8. (а) Зависимость числа Нуссельта от числа Гершуни в момент времени  $t = 22$  с от начала вибрации (сплошная линия) и в стационарном состоянии (штриховая линия) в невесомости. (б) Зависимость числа Нуссельта от числа Гершуни при различных уровнях остаточных ускорений в момент времени  $t = 22$  с.

режиму.

С помощью численного моделирования было также исследовано влияние вибрации на перенос тепла в ячейке. На рис. 8.8 (а) показана зависимость числа Нуссельта от числа Гершуни через 22 секунды после начала вибрации, а также в стационарном состоянии в условиях невесомости. Обе кривые демонстрируют рост  $Nu$  с увеличением  $G_s$ , при этом соответствующие значения числа Нуссельта отличаются не очень сильно. Отсюда следует, что ограниченное время низкой гравитации достаточно для наблюдения интенсификации теплообмена под действием термовибрационной конвекции. Заметим, что две кривые совпадают в диапазоне  $0 < G_s < G_{s_{cr}}$ , где  $G_{s_{cr}} \approx 18 \times 10^3$ . При указанных значениях числа Гершуни в ячейке имеет место четырехвихревой режим, который очень быстро устанавливается. При  $G_{s_{cr}} < G_s < 160 \times 10^3$  в стационарном состоянии наблюдается трехвихревой режим. Однако, через 22 секунды после начала вибрации в ячейке наблюдается структура из четырех вихрей для всех значений  $G_s$  из указанного интервала. Это связано с тем, что время установления трехвихревого режима в невесомости значительно больше 22 секунд, см. рис. 8.7 и Таблицу 8.4. Полученная зависимость  $Nu$  от  $G_s$  в стационарном состоянии полностью совпадает с известными резуль-

татами [46]. Однако, критическое значение числа Гершуни  $Gs_{cr} \approx 18 \times 10^3$  слегка превышает значение  $15 \times 10^3$ , соответствующее  $Pr = 1$ . Для изопропанола число Прандтля  $Pr = 27.8$ . Ожидается, что в более вязкой (или менее теплопроводной) жидкости четырехвихревой режим существует в более широком диапазоне чисел Гершуни (или, другими словами, при больших скоростях колебаний и разностях температур).

Влияние остаточных ускорений на перенос тепла в ячейке показано на рис. 8.8 (б). Эти данные соответствуют 22 секундам после начала вибрации. Наличие постоянного ускорения  $g_x/g_0$  приводит к увеличению числа Нуссельта на 0.4. Стабилизирующее влияние  $g_z$  компенсирует этот эффект, уменьшая указанную разность в 1.5 – 2 раза. Остаточные ускорения на рис. 8.8 (б) соответствуют числам Рэлея  $Ra_x = 1246$  и  $Ra_z = 4983$ . Анализ отношений числа Гершуни к числам Рэлея с ростом  $Gs$  позволяет определить, при каких значениях параметров термовибрационный механизм становится доминирующим. Например, при  $Gs = 30 \times 10^3$  имеем  $Gs/Ra_x = 24$  и  $Gs/Ra_z = 6$ , поэтому вибрационная конвекция является более интенсивной, чем конвекция, вызванная остаточными ускорениями. Заметим, что при наличии остаточных ускорений осредненное течение через 22 секунды после начала вибрации имеет трехвихревую структуру. В случае полной невесомости эта структура состоит из четырех вихрей.

Проведенное исследование показало, что остаточные ускорения в параболическом полете оказывают влияние на перенос тепла в ячейке. Однако, тенденция увеличения числа Нуссельта с ростом числа Гершуни остается практически такой же, как в невесомости.

### 8.1.5 Интенсивность термовибрационной конвекции

Перейдем к описанию экспериментальных результатов и их сравнению с численными расчетами.

Основным методом наблюдения в эксперименте является регистрация поля температур с помощью оптической интерферометрии, см. пункт 8.1.1. Сте-

Таблица 8.5. Сеансы эксперимента, для которых проведено численное моделирование на основе трехмерных уравнений с переменными ускорениями. Числа Рэлея  $\text{Ra}_{x,y} = 2492$  и  $\text{Ra}_z = 4983$  соответствуют остаточным ускорениям  $g_{x,y}/g_0 = 0.01$  и  $g_z/g_0 = 0.02$ .

Сеанс	$f$ , Гц	$A$ , мм	$\Delta T$ , К	$\text{Ra}_{os}$	$\Omega$	Gs	$\text{Gs/Ra}_{x,y}$	$\text{Gs/Ra}_z$
2	0	0	20	0	0	0	0	0
5	4	20	20	320870	363	14054	5.64	2.82
11	8	17	20	1090959	726	40616	16.30	8.15
15	4	45	20	721958	363	71149	28.55	14.28

пень отклонения температуры от линейного распределения позволяет судить об интенсивности термовибрационной конвекции. Регистрация поля температур производилась один раз за период колебаний, когда ячейка находилась в фокусе камеры. Как показали предварительные численные расчеты [72], амплитуда колебаний температуры очень мала по сравнению с изменением температуры под действием осредненного течения. Поэтому мгновенное поле температур, регистрируемое в эксперименте один раз за период, практически не отличается от осредненного поля.

Для численного моделирования термовибрационной конвекции в условиях параболического полета использовались трехмерные уравнения (8.4) с граничными условиями (8.6), (8.7) и начальными условиями (8.8). Расчет начинался за шесть минут до начала серии парабол (когда самолет находился в горизонтальном полете). К этому времени в ячейке устанавливалось линейное распределение температуры. Численный расчет проводился для нескольких парабол (включая время между ними) с учетом переменных ускорений  $\mathbf{g}(t)$ , данные о которых были получены с помощью акселерометра, см. рис. 8.3.

Список сеансов эксперимента, численное моделирование которых было проведено на основе трехмерных уравнений, приведен в Таблице 8.5. На рис. 8.9 показаны поля скорости и температуры в конце каждого сеанса. Для сравнения представлены результаты эксперимента и численного моделирования

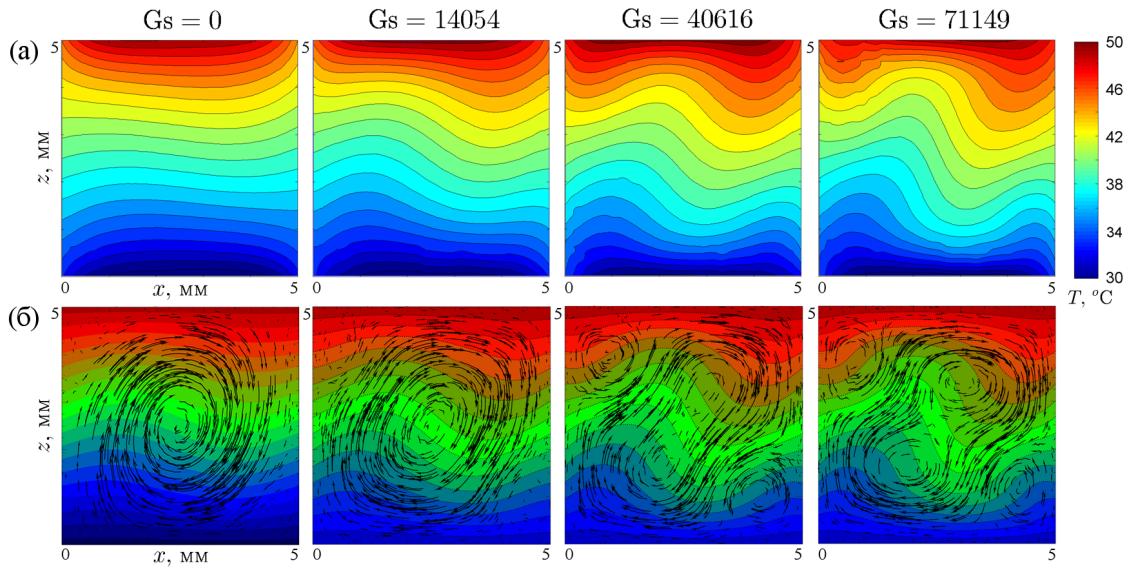


Рис. 8.9. Осредненные поля скорости и температуры для различных значений числа Гершуни в конце сеансов 2, 5, 11, 15: (а) эксперимент, (б) численный расчет.

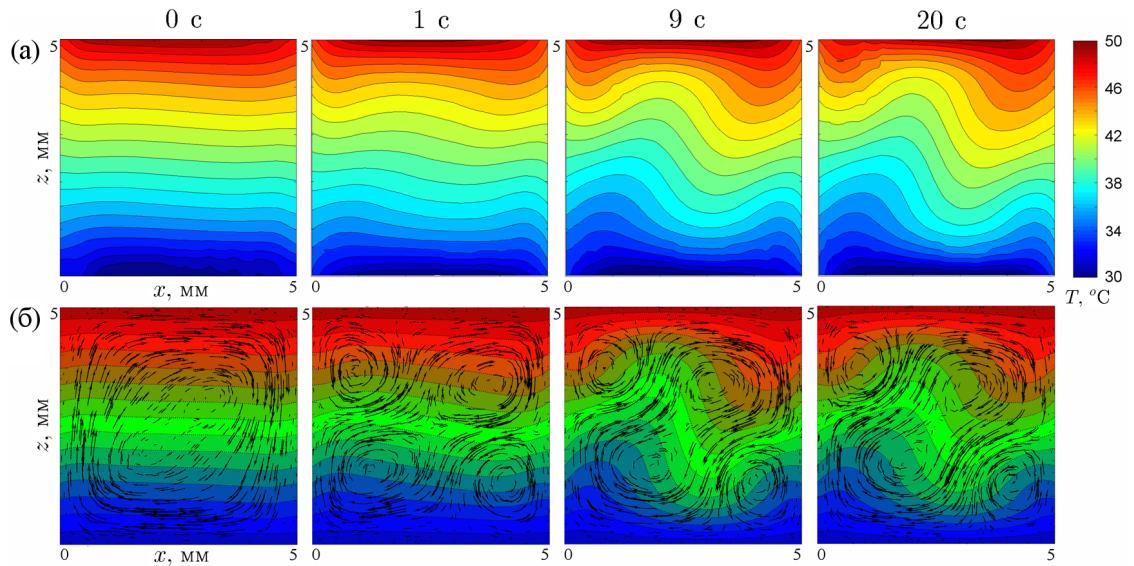


Рис. 8.10. Эволюция осредненных полей скорости и температуры со временем в сеансе 15 при  $f = 4$  Гц,  $A = 45$  мм,  $\Delta T = 20$  К,  $Gs = 71149$ : (а) эксперимент, (б) численный расчет.

для различных значений числа Гершуни. Экспериментальные результаты на рис. 8.9 (а) представляют собой проекции поля температур на плоскость  $xz$  (вид сбоку), см. также рис. 8.1. Осредненные поля температур и скоростей на рис. 8.9 (б) рассчитываются по данным численного моделирования на основе формул (8.11). Для построения двумерных картин трехмерное поле температур осредняется в направлении оси  $y$ . Осредненное поле скоростей показано в

сечении  $y = 2.5$  мм.

Рассмотрим вначале случай отсутствия вибрации (сеанс 2,  $G_s = 0$ ). Экспериментальное поле температур в этом случае характеризуется небольшими отклонениями от чисто теплопроводного режима. Причиной этому является слабое конвективное течение, возникающее под действием остаточных ускорений. Ускорения в направлениях  $x$  и  $y$  перпендикулярны градиенту температуры и слегка дестабилизируют состояние равновесия, в то время как ускорение в направлении оси  $z$  может быть стабилизирующим или дестабилизирующим в зависимости от знака  $g_z$ . Согласно результатам численного моделирования, течение имеет одновихревую структуру. Сравнение экспериментальных и численных полей температуры показывает их совпадение в центральной части ячейки и небольшие различия вблизи стенок. Заметим, что боковые стенки ячейки в форме двух призм (рис. 8.1) вызывают потоки тепла в боковых направлениях. В численном расчете с линейным профилем температуры на боковых стенках эти потоки оказываются несколько меньше. В целом, экспериментальные и численные результаты достаточно хорошо согласуются. Анализ всех сеансов в отсутствии вибрации показывает, что отклонения от теплопроводного режима являются весьма небольшими.

При наличии вибрации поле температур меняется. Для сравнительно небольшого числа Гершуни  $G_s = 14054$  (сеанс 5) изменения еще не слишком большие. Вибрационный механизм конвекции не является доминирующим в том, что отношения  $G_s / Ra_{x,y,z}$  невелики, см. Таблицу 8.5. В ячейке наблюдается осредненное течение из одного вихря, наклоненного вправо. Наклон связан с положительностью остаточного ускорения  $g_x/g_0$  в период низкой гравитации, см. рис. 8.3.

С увеличением числа Гершуни вибрационная конвекция становится более интенсивной и приводит к значительным отклонениям поля температур от теплопроводного режима (сеанс 11,  $G_s = 40616$ ). Эффект становится еще более заметным в сеансе 15 при  $G_s = 71149$ . В последнем случае отношения  $G_s / Ra_{x,y,z}$  достаточно велики, поэтому термовибрационный механизм явля-

ется доминирующим. Численный расчет показывает, что осредненное течение состоит из одного большого диагонального вихря и двух маленьких вихрей в углах ячейки. Экспериментальные и численные результаты хорошо согласуются.

Развитие термовибрационной конвекции в течение сеанса 15 при  $G_s = 71149$  показано на рис. 8.10. В начальный момент времени (0 с) поле температур близко к теплопроводному режиму, при этом имеет место очень слабая конвекция из-за наличия остаточных ускорений. Термовибрационная конвекция вызывает изменение поля температур, которое нарастает со временем. Численный расчет через 1 секунду после начала вибрации показывает осредненное течение из четырех вихрей. Экспериментально наблюдаемое поле температур подтверждает эту структуру. Течение не является полностью симметричным в силу остаточных ускорений. Этот результат согласуется с двумерными расчетами в пункте 8.1.4. Ранее было установлено, что при постоянных ускорениях  $g_x/g_0 = 3 \times 10^{-3}$  и  $g_z/g_0 = 10^{-2}$  четырехвихревой режим существует в течение 1.18 секунды после начала вибрации, см. Таблицу 8.4. После этого происходит смена режима, и возникает структура из трех вихрей. Сравнение экспериментальных полей температуры на 9 и 20 секундах показывает увеличение изгиба изотерм в последнем случае. В численном расчете этот эффект несколько меньше.

На рис. 8.11 показаны интерференционные картины в начале (0 с) и в конце (20 с) сеанса 15. Поля температуры, представленные на рис. 8.10 (а) были восстановлены по этим картинам. На первой картине (0 с) видны интерференционные полосы, которые имеют одинаковую толщину и расположены параллельно под определенным углом к горизонтали (за исключением областей вблизи стенок, где наблюдаются небольшие отклонения температуры от линейного распределения). На второй картине (20 с) видно, что полосы в диагональной области от левого нижнего до правого верхнего угла ячейки становятся толще и расположены реже. В остальной части ячейки полосы более тонкие и расположены чаще. Более частые (редкие) полосы свидетельствуют

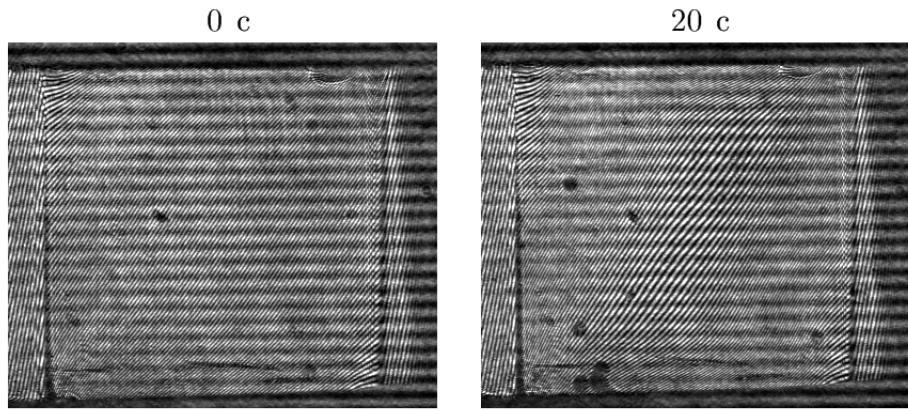


Рис. 8.11. Интерференционные картины (вид сбоку) в различные моменты времени для сеанса 15 при  $f = 4$  Гц,  $A = 45$  мм,  $\Delta T = 20$  К, Gs = 71149.

ют о большем (меньшем) градиенте температуры в указанной области. Это подтверждает рис. 8.10 (а).

Режимы течения, наблюдаемые экспериментально на основе анализа поля температур (включая переход от четырехвихревого к трехвихревому режиму), подтверждают численные исследования, проведенные ранее [46, 189–191]. Результаты численного моделирования в пункте 8.1.4 свидетельствуют о том, что трехвихревой режим, наблюдаемый в конце периода низкой гравитации, достаточно близок к стационарному состоянию. Последнее характеризуется более интенсивным осредненным течением согласно рис. 8.8 (а).

Заметим, что осредненные течения, наблюдаемые в данной работе, имеют сходство с течениями, вызванными постоянной гравитацией в земных условиях (см., например, работу [326] о конвекции Рэлея–Бенара в кубической полости). Этот факт поддерживает идею об использовании вибрации для создания искусственной гравитации в космосе с целью обеспечить конвективный перенос тепла и примесей [47].

### 8.1.6 Пространственная структура течения

Для изучения пространственной структуры течения обратимся к экспериментально наблюдаемым полям температуры и численным расчетам. Сравнение экспериментальных и численных результатов для сеанса 15 с параметрами

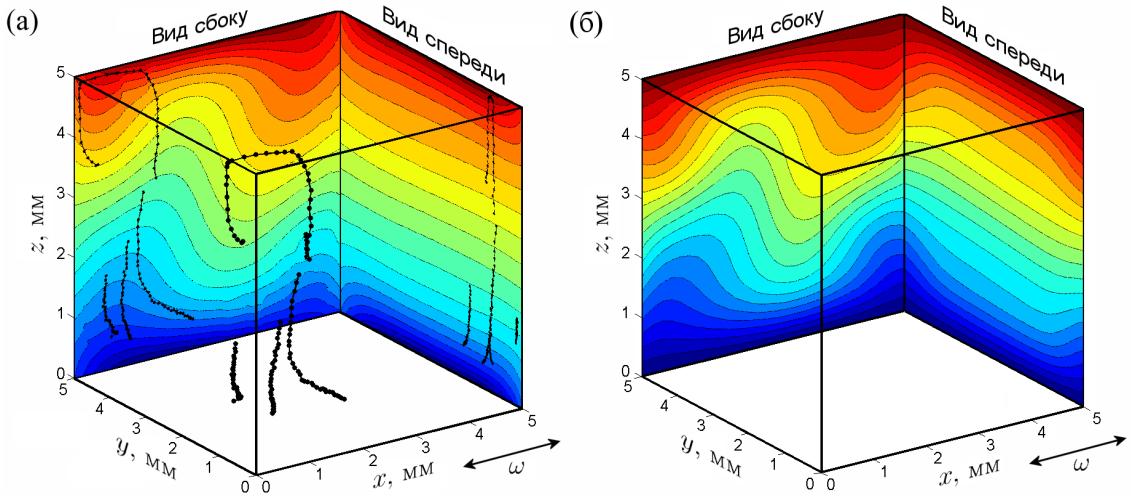


Рис. 8.12. Проекции поля температур в ячейке на плоскости  $xz$  и  $yz$  в конце сеанса 15:  
 (а) эксперимент, (б) численный расчет. Показаны экспериментальные осредненные траектории нескольких частиц.

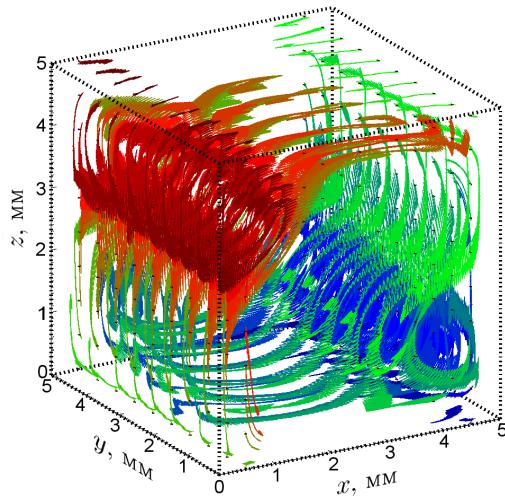


Рис. 8.13. Численный расчет траекторий 200 жидких частиц, стартующих из плоскостей  $x = 0.5$  мм и  $x = 4.5$  мм в сеансе 15. Частицы перемещаются вдоль линий тока осредненного течения, совершая при этом колебания.

$f = 4$  Гц,  $A = 45$  мм,  $\Delta T = 20$  К,  $Gs = 71149$  представлено на рис. 8.12. Проекции трехмерного численного поля температур на плоскость  $xz$  (вид сбоку) и плоскость  $yz$  (вид спереди) получаются путем осреднения в направлениях  $y$  и  $x$  соответственно. Экспериментальное и численное поля температур в плоскости  $xz$  хорошо согласуются друг с другом. То же самое можно сказать о полях температуры в плоскости  $yz$ , за исключением областей вблизи боковых стенок.

Заметим, что распределение температуры в этой плоскости не сильно отличается от линейного. Дело в том, что проекция поля температур на плоскость  $yz$  представляет собой суперпозицию полей в плоскостях, соответствующих постоянным значениям  $x$ . Наблюдаемое поле температур формируется благодаря чередованию областей высокой и низкой температуры при перемещении в направлении  $x$  при постоянных значениях  $y$  и  $z$ . Наблюдения показывают, что с течением времени расстояние между изотермами увеличивается в средней части ячейки и уменьшается вблизи верхней и нижней стенок.

Анализ трехмерного поля скоростей производился путем построения траекторий "жидких" частиц на основе численных расчетов. Кроме этого, использовались экспериментальные данные о траекториях твердых частиц в ячейке. Численный расчет траекторий "жидких" частиц сводится к решению задачи

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (8.21)$$

где  $\mathbf{u}$  — размерное поле скоростей,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор частицы,  $\mathbf{r}_0$  — начальное положение частицы. Поле скоростей определяется численным решением трехмерной задачи (8.4)–(8.8). Интегрирование задачи (8.21) проводилось методом Рунге–Кутты четвертого порядка, при этом использовалась линейная интерполяция поля скоростей с узлов сетки на текущую координату частицы [327].

Трехмерная структура течения показана на рис. 8.13. Для получения этой картины в каждой из плоскостей  $x = 0.5$  мм и  $x = 4.5$  мм было размещено по 100 равноудаленных частиц ( $10 \times 10$ ). Траектории этих частиц отслеживались на протяжении сеанса 15 путем численного интегрирования задачи (8.21). На рисунке ясно видна структура осредненного течения из одного большого диагонального вихря и двух маленьких вихрей в углах, которые показаны красным и синим цветом. Заметим, что в начале сеанса 15 осредненное течение состоит из четырех вихрей, см. рис. 8.10 (б). Однако, эта начальная структура не оказывает заметного влияния на траектории частиц на рис. 8.13 в силу быстрого перехода к трехвихревому режиму.

Анализ траекторий частиц показывает, что движение в направлении оси  $y$



Рис. 8.14. Зависимость максимальной осредненной скорости (численный расчет) и средней скорости одной твердой частицы (эксперимент) от времени.

практически отсутствует. Структуры течения в плоскостях, соответствующих постоянным значениям  $y$ , подобны (за исключением областей вблизи боковых стенок). Поэтому режим течения в кубической ячейке может быть охарактеризован как квази-двумерный. Амплитуда колебаний частиц зависит от их текущего положения в ячейке. Частицы в диагональном вихре имеют малую амплитуду колебаний при прохождении вблизи стенок. При движении этих частиц вблизи малых вихрей амплитуда колебаний сначала растет, затем падает, после чего растет вновь и окончательно уменьшается при подходе к стенке. Численные и экспериментальные результаты подтверждают трехмерные расчеты термовибрационных течений, выполненные ранее в работе [191].

Для определения скорости осредненного течения был проведен сравнительный анализ максимальной осредненной скорости в объеме (по данным численного расчета) и скорости твердой частицы, описывающей траекторию в виде петли на рис. 8.12 (а). Результаты представлены на рис. 8.14. Момент времени  $t = 0$  соответствует началу периода низкой гравитации. Как видно, отличие экспериментальной кривой от численной кривой невелико при  $t = 12 - 16$  с, однако нарастает в дальнейшем. Согласие численных и экспериментальных данных здесь является удовлетворительным.

### 8.1.7 Интенсификация теплообмена

Эксперименты по термовибрационной конвекции в широкой области параметров позволяют количественно исследовать влияние вибрации на перенос

тепла в ячейке. Для вычисления числа Нуссельта (8.9) использовалась полиномиальная интерполяция экспериментального поля температур вблизи стенок. Это позволило определить нормальную компоненту градиента температуры  $\partial T / \partial n$  с хорошей точностью. Зависимость числа Нуссельта от времени в сеансе 15 при  $G_s = 71149$  (см. Таблицу 8.5) показана на рис. 8.15. В первые пять секунд после начала вибрации наблюдается значительное усиление теплообмена. После этого рост  $Nu$  замедляется. В последние пять секунд  $Nu$  слегка снижается, при этом возникают колебания. На рисунке также показаны результаты трехмерного численного расчета. С целью корректного сравнения с экспериментальными данными осредненное по времени трехмерное поле температур было также усреднено в направлении  $y$ . После этого было вычислено число Нуссельта согласно формуле (8.9). Как видно из графиков, число Нуссельта в эксперименте больше, чем в численном расчете. Это связано с наличием тепловых потоков через боковые стенки в форме двух призм, см. рис. 8.1. Из рис. 8.9 для  $G_s = 71149$  видно, что градиенты температуры вблизи боковых стенок и в углах ячейки в эксперименте больше, чем в численном расчете (напомним, что расчет соответствует линейному профилю температуры на боковых стенках). Тем не менее, характер роста числа Нуссельта со временем в эксперименте и численном расчете одинаков, при этом соответствующие значения весьма близки в конце периода низкой гравитации. Можно предположить, что учет теплопроводности в боковых стенках в численном расчете позволит улучшить согласие с экспериментом. Однако, ценность полученных результатов состоит в том, что простые граничные условия, использованные ранее в ряде теоретических работ [46, 189, 192], позволяют получить хорошее согласие с экспериментом.

Экспериментальная зависимость числа Нуссельта от числа Гершуни представлена на рис. 8.16 (а). Число Нуссельта рассчитывается как среднее значение  $Nu(t)$  за последние три секунды каждого сеанса. Список всех сеансов приведен в Таблице 8.2. Сплошная линия показывает характер роста  $Nu$  с увеличением  $G_s$ . Для небольших значений числа Гершуни ( $G_s < 15 \times 10^3$ )

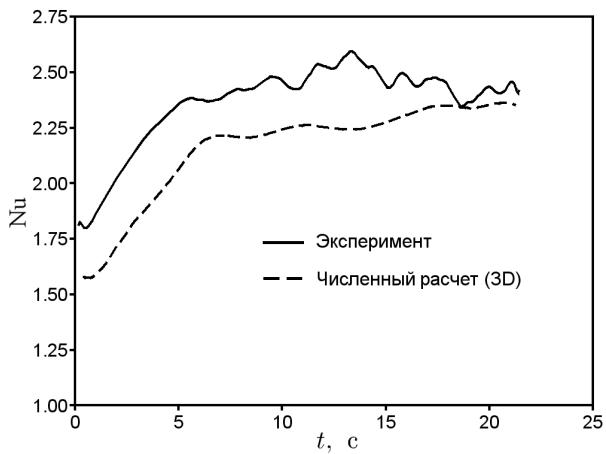


Рис. 8.15. Эволюция числа Нуссельта со временем в сеансе 15 при  $f = 4$  Гц,  $A = 45$  мм,  $\Delta T = 20$  К,  $G_s = 71149$ . Показаны результаты эксперимента и трехмерного численного расчета.

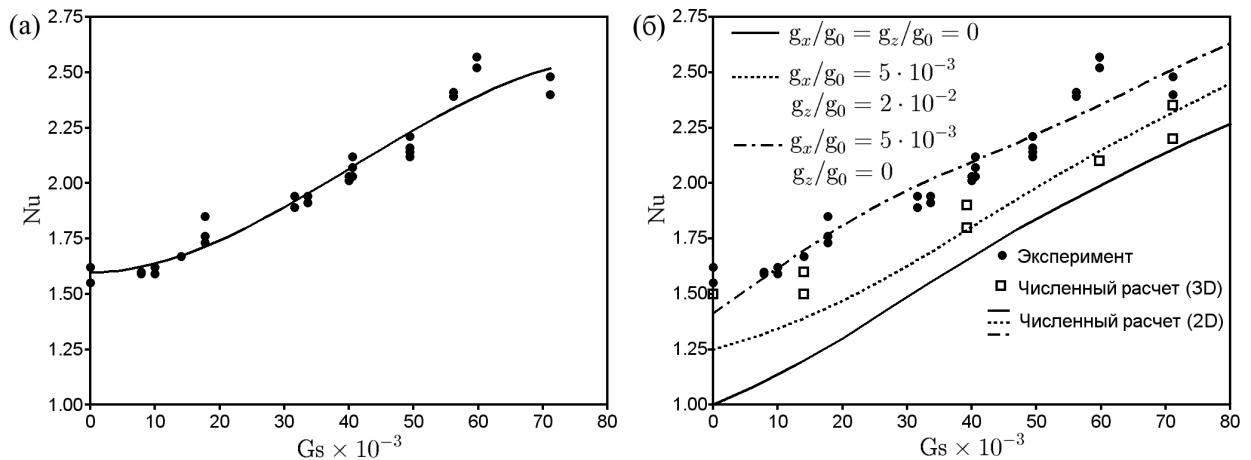


Рис. 8.16. (а) Экспериментальная зависимость числа Нуссельта от числа Гершуни.  
(б) Сравнение экспериментальных данных и численных результатов на основе двумерной и трехмерной моделей.

число Нуссельта  $Nu \approx 1.6$  не зависит от уровня вибрации. В этой области доминирует слабая конвекция, вызванная остаточными ускорениями, см. также рис. 8.9. С ростом числа Гершуни вибрационный механизм конвекции начинает доминировать, вызывая существенный рост числа Нуссельта.

Сравнение экспериментальных данных и численных результатов на основе двумерной и трехмерной моделей показано на рис. 8.16 (б). Непрерывные линии соответствуют двумерным численным расчетам с использованием

ем осредненных уравнений, см. также рис. 8.8. Результаты трехмерных расчетов на основе полных уравнений показаны квадратными точками. Пары точек для одного и того же значения  $G_s$  отвечают различным параболам с разным уровнем остаточных ускорений. Из графика видно, что экспериментальные значения слегка превышают численные значения. Экспериментальные точки лежат вдоль линии, соответствующей уровню остаточных ускорений  $g_x/g_0 = 5 \times 10^{-3}$ ,  $g_z/g_0 = 0$ . В реальном параболическом полете  $g_x/g_0$  зависит от времени и всегда дестабилизирует вибрационное течение, в то время как  $g_z/g_0$  может быть как дестабилизирующим, так и стабилизирующим, см. рис. 8.3. Как уже отмечалось выше, экспериментальные тепловые потоки через боковые стенки являются более интенсивными, чем в численном расчете. Этим объясняется различие экспериментальных и численных значений  $Nu$ . В то же время, характер изменения числа Нуссельта в эксперименте и численном расчете одинаков. Полученные результаты демонстрируют значительный рост числа Нуссельта с увеличением интенсивности вибрации.

В дополнение к сеансам эксперимента в условиях низкой гравитации, часть сеансов была проведена при нормальной гравитации  $g_z/g_0 = 1$ . Список этих сеансов приведен в Таблице 8.3. Ячейка подогревалась сверху и охлаждалась снизу. Было обнаружено, что сила тяжести приводит к подавлению вибрационной конвекции. Наблюдаемое поле температур практически не отличается от режима чистой теплопроводности.

## 8.2 Об интенсивности осредненных течений

При изучении осредненных течений представляет интерес задача о нахождении простых соотношений (оценок), выраждающих зависимость осредненной скорости, температуры и давления от управляемых параметров и физических свойств жидкости. Эта задача была решена в работе [80] в рамках исследования применимости приближения Обербека–Буссинеска к задачам вибрационной конвекции. В данном параграфе приводится изложение полученных результатов.

Будем предполагать, что жидкость находится в вибрационном поле, заданном вектором ускорения  $A\omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{e}$ , где  $A$  — амплитуда колебаний,  $\omega$  — круговая частота,  $\mathbf{e}$  — постоянный вектор направления вибрации. Другие силы на жидкость не действуют. В пределе высокой частоты и малой амплитуды колебаний (см. неравенства (8.12), (8.13)) осредненные уравнения движения имеют вид (8.14), где следует положить  $\mathbf{g} = 0$ . Будем предполагать, что в жидкости имеет место установившееся (стационарное) осредненное течение. Тогда изменение осредненной температуры по порядку величины совпадает с приложенной разностью температур  $\Delta T$ . Из первого соотношения в (8.16) следует, что такой же порядок имеют величины  $\nabla F$  и  $\mathbf{w}$ . Таким образом,

$$|\bar{T}| \sim \Delta T, \quad |\nabla F| \sim \Delta T, \quad |\mathbf{w}| \sim \Delta T. \quad (8.22)$$

Перейдем к оценке осредненной скорости. Заметим, что при выводе осредненных уравнений в монографии [46] неявно подразумевается, что  $|\bar{\mathbf{u}}| \sim \nu/L$ . Причины такого выбора не обсуждаются. В то же время, из уравнений движения (8.14) и оценок (8.22) очевидно, что осредненная скорость должна зависеть от частоты и амплитуды колебаний, приложенной разности температур, коэффициента теплового расширения и кинематической вязкости. Для оценки осредненной скорости запишем осредненное уравнение импульса в виде

$$(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\rho_0^{-1} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \frac{(\beta_T A \omega)^2}{2} ((\bar{T} \mathbf{e} - \nabla F) \cdot \nabla) \nabla F. \quad (8.23)$$

Отсюда следует, что конвективные и (или) вязкие члены должны иметь тот же порядок величины, что и осредненная вибрационная сила в правой части. Величина указанных членов не может превышать величину вибрационной силы, так как последняя является источником движения.

Предположим, что

$$|\nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}}| \sim \left| \frac{(\beta_T A \omega)^2}{2} ((\bar{T} \mathbf{e} - \nabla F) \cdot \nabla) \nabla F \right|.$$

Учитывая, что  $|\nabla| \sim L^{-1}$ , где  $L$  — характерный размер, получим следующую оценку величины осредненной скорости:

$$|\bar{\mathbf{u}}| \sim \frac{(\beta_T \Delta T A \omega)^2 L}{\nu}.$$

Сравнение величин конвективных и вязких членов дает

$$\frac{|(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}|}{|\nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}}|} \sim \frac{|\bar{\mathbf{u}}| L}{\nu} \equiv \text{Re} \sim \frac{\text{Gs}}{\text{Pr}}, \quad (8.24)$$

где  $\text{Re}$  — число Рейнольдса. Эта оценка верна при малых числах Рейнольдса ( $\text{Re} < 1$ ). При больших  $\text{Re}$  из соотношения (8.24) следует, что величина вязких членов значительно меньше величины конвективных членов. Это, в свою очередь, противоречит предположению о том, что вязкие члены сравнимы с осредненной вибрационной силой.

Рассмотрим теперь случай

$$|(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}| \sim \left| \frac{(\beta_T A \omega)^2}{2} ((\bar{T} \mathbf{e} - \nabla F) \cdot \nabla) \nabla F \right|.$$

Отсюда следует оценка осредненной скорости

$$|\bar{\mathbf{u}}| \sim \beta_T \Delta T A \omega.$$

Сравнение величин конвективных и вязких членов дает

$$\frac{|(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}|}{|\nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}}|} \sim \frac{|\bar{\mathbf{u}}| L}{\nu} \equiv \text{Re} \sim \left( \frac{\text{Gs}}{\text{Pr}} \right)^{1/2}, \quad (8.25)$$

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, заключаем, что эта оценка верна при больших числах Рейнольдса ( $\text{Re} \geq 1$ ).

Для проверки полученных оценок было проведено численное моделирование термовибрационных течений в квадратной ячейке (в плоскости  $xz$  на рис. 8.1 (б)) на основе осредненных уравнений (8.17) с граничными условиями (8.18) и начальными условиями (8.19) в предположении  $\text{Ra}_x = \text{Ra}_z = 0$ . Расчет проводился до установления стационарного осредненного течения. Численное моделирование позволило установить коэффициент пропорциональности между числом Рейнольдса  $\text{Re}$  и отношением  $\text{Gs}/\text{Pr}$  в формулах (8.24), (8.25) для получения точной оценки величины скорости. С учетом этого коэффициента для  $\text{Re} < 1$  будем иметь

$$\text{Re} \sim \gamma^2 \frac{\text{Gs}}{\text{Pr}}, \quad |\bar{\mathbf{u}}| \sim \frac{(\gamma \beta_T \Delta T A \omega)^2 L}{\nu}, \quad (8.26)$$

в то время как для  $\text{Re} \geq 1$

$$\text{Re} \sim \gamma \left( \frac{\text{Gs}}{\text{Pr}} \right)^{1/2}, \quad |\bar{\mathbf{u}}| \sim \gamma \beta_T \Delta T A \omega. \quad (8.27)$$

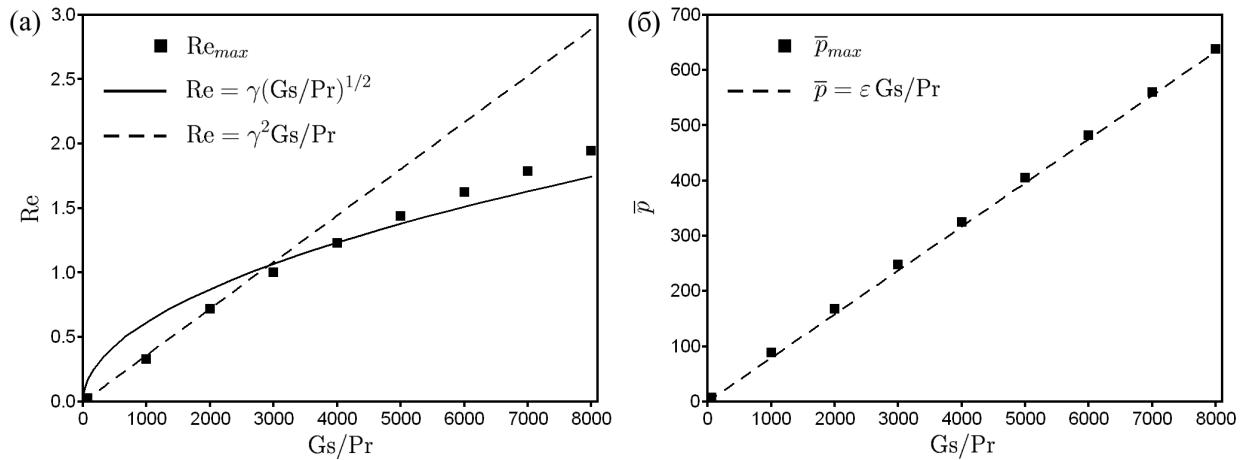


Рис. 8.17. Зависимость максимального числа Рейнольдса (а) и безразмерного максимального давления (б) от отношения  $Gs/Pr$ . Результаты численного моделирования показаны точками. Коэффициенты пропорциональности  $\gamma = 0.0195$ ,  $\varepsilon = 0.0792$ .

Из этих соотношений с учетом (8.15) и (8.22) следует, что при больших числах Рейнольдса коэффициент  $\gamma$  имеет смысл отношения величин осредненной и пульсационной компонент скорости:  $\gamma \sim |\bar{\mathbf{u}}| / |\mathbf{u}'|$ . Так как осредненная скорость существенно меньше пульсационной скорости, можно ожидать, что  $0 < \gamma < 1$ .

Полученная зависимость числа Рейнольдса от отношения чисел Гершуни и Прандтля представлена на рис. 8.17 (а) для  $Pr = 25$ . Результаты численного моделирования показаны точками, в то время как зависимости (8.26) и (8.27) показаны штриховой и сплошной линиями соответственно. Значения числа Рейнольдса соответствуют максимальной осредненной скорости в ячейке. Коэффициент пропорциональности  $\gamma = 0.0195$ . Численные расчеты полностью подтверждают полученные выше оценки. Согласно графику на рис. 8.17, число Рейнольдса для осредненного течения  $0 \leq Re < 2$  в широком диапазоне чисел Гершуни  $0 \leq Gs < 200 \times 10^3$ . Таким образом, при указанных значениях  $Gs$  порядок осредненной скорости не превышает порядка вязкой скорости  $\nu/L$ . Это неявно подразумевалось при выводе осредненных уравнений в монографии [46]. В то же время, осредненная скорость растет с увеличением  $Gs$ . С ростом числа Гершуни может произойти переход от стационарного течения к нестационарному и далее к хаотическому режиму.

Перейдем к оценке осредненного давления. Из уравнения (8.23) следует, что градиент давления должен быть сравним по порядку величины с осредненной вибрационной силой:

$$|\rho_0^{-1} \nabla \bar{p}| \sim \left| \frac{(\beta_T A \omega)^2}{2} ((\bar{T} \mathbf{e} - \nabla F) \cdot \nabla) \nabla F \right|.$$

В результате получаем оценку  $|\bar{p}| \sim \rho_0 (\beta_T \Delta T A \omega)^2$ . Вводя безразмерное давление согласно (8.3) и коэффициент пропорциональности  $\varepsilon$ , найдем

$$|\bar{p}| \sim \varepsilon \frac{G_s}{Pr}. \quad (8.28)$$

Значение коэффициента  $\varepsilon$  определялось на основе численных расчетов. Для этого к системе (8.14) было добавлено уравнение для расчета давления

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{p} = & 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right)^2 + \frac{G_s}{Pr} \left[ - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \left( \bar{T} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x \partial z} \frac{\partial f}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} x = 0, 1 : \quad & \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z} - \frac{G_s}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z}, \\ z = 0, 1 : \quad & \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial z^2}, \\ t = 0 : \quad & \bar{p} = 0. \end{aligned}$$

Зависимость максимального давления в ячейке от отношения  $G_s/Pr$  показана на рис. 8.17 (б). Численные расчеты подтверждают линейную зависимость (8.28) с коэффициентом пропорциональности  $\varepsilon = 0.0792$ . Заметим, что коэффициенты  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  могут зависеть от числа Прандтля.

Полученные в данном параграфе оценки использовались при анализе применимости приближения Обербека–Буссинеска к задачам вибрационной конвекции в работе [80].

# Заключение

В диссертационной работе впервые разработан общий подход к описанию многокомпонентных смесей с эффектом Соре и исследованию их конвективной устойчивости в различных конфигурациях. Подход основан на использовании безразмерных отношений разделения и применении специальных преобразований для упрощения уравнений. Установлены свойства инвариантности уравнений движения бинарных и многокомпонентных смесей. Построена линейная теория устойчивости смесей в экспериментальных установках для измерения коэффициентов переноса (термодиффузионная колонна, плоский слой). Установлены общие характеристики устойчивости, справедливые для смесей с произвольным числом компонент. Изучены закономерности поведения многокомпонентных смесей в условиях естественной и вынужденной конвекции.

Сформулируем основные результаты диссертации.

1. Предложен новый формализм для описания многокомпонентных смесей с эффектом Соре на основе безразмерных параметров — *отношений разделения*. Эти параметры характеризуют отношение градиентов плотности, вызванных градиентами концентраций и температуры в условиях термодиффузионного разделения. Введено понятие *суммарного отношения разделения*, которое не зависит от выбора растворителя. Предложенный формализм позволяет эффективно решать задачи о конвекции в смесях.
2. Впервые установлены свойства инвариантности уравнений движения бинарной и многокомпонентной смесей с эффектом Соре. Вычислены группы преобразований и соответствующие алгебры Ли операторов, допускаемые уравнениями в зависимости от значений физических параметров (реше-

на задача групповой классификации). Выполнена классификация инвариантных решений для двумерных и трехмерных уравнений конвекции бинарной смеси (построены оптимальные системы подалгебр). Изучены групповые свойства осредненных уравнений вибрационной конвекции бинарной смеси.

3. Найдено новое преобразование, которое позволяет исключить члены, связанные с перекрестной диффузией, из уравнений конвекции многокомпонентной смеси. Показано, что сила плавучести в уравнении импульса и суммарное отношение разделения инвариантны относительно этого преобразования. Установлена применимость последнего к задачам конвекции в областях с проницаемыми и непроницаемыми границами. Найдено преобразование, которое позволяет исключить члены, характеризующие термодиффузию, из уравнений переноса массы.
4. Впервые построена линейная теория устойчивости равновесия в плоском слое многокомпонентной смеси с эффектом Соре. Установлен принцип монотонности возмущений для слоя со свободными / твердыми проницаемыми границами. Найдены критические параметры неустойчивости относительно длинноволновых возмущений в смеси с произвольным числом компонент для твердых непроницаемых границ слоя. Построены карты устойчивости для тройных смесей в широкой области параметров. Обнаружено существование длинноволновой колебательной неустойчивости в смесях с тремя и большим числом компонент. Эта неустойчивость имеет место при наличии стабилизирующих и дестабилизирующих градиентов концентрации компонентов с различными диффузионными временами. Выполнено сравнение аналитических и численных результатов для различных типов граничных условий (свободные/твердые, проницаемые/непроницаемые границы). Изучена устойчивость стационарного конвективного течения многокомпонентной смеси с эффектом Соре в плоском вертикальном слое, подогреваемом сбоку, относительно длинноволновых возмущений.

5. Развита теория разделения многокомпонентных смесей в замкнутой термодиффузионной колонне. Ключевым элементом теории является использование безразмерных отношений разделения. Найдено точное решение уравнений движения многокомпонентной смеси. Впервые показано, что это решение может быть единственным, неединственным, а также может не существовать в зависимости от значений суммарного отношения разделения. В последних двух случаях тяжелые компоненты накапливаются в верхней части колонны, что приводит к потенциально неустойчивой стратификации. Изучено влияние зависимости плотности от концентрации на измеряемые значения коэффициентов термодиффузии. Впервые предложен критерий, при выполнении которого можно пренебречь вертикальной диффузией в колонне. Установлены закономерности влияния высокочастотной вибрации колонны на разделение смеси. Вибрация приводит к уменьшению вертикального разделения смеси, а также к неединственности стационарного решения для смесей с нормальным эффектом Соре.
6. Впервые построена линейная теория устойчивости стационарного течения в колонне для двух типов возмущений (продольных и поперечных волн). Установлены основные физические механизмы неустойчивости, описаны типичные структуры возмущений. Показано, что в колонне имеет место монотонная неустойчивость, связанная с образованием вихрей на границе встречных потоков, а также колебательная неустойчивость, обусловленная температурными и концентрационными волнами в условиях вертикальной стратификации. Неустойчивость в поперечном направлении колонны связана с дестабилизирующим вертикальным градиентом плотности в смесях с аномальным эффектом Соре (в этом случае тяжелые компоненты концентрируются в верхней части колонны). Для поперечных волн доказан аналог принципа монотонности возмущений, а также ряд теорем, характеризующих свойства устойчивости системы для смеси с произвольным числом компонент. Построены карты устойчивости для бинарных и тройных смесей в широкой области параметров.

7. Впервые проведено обобщение задачи Греца о теплообмене в круглой цилиндрической трубе с течением Пуазейля на случай многокомпонентной смеси с учетом эффектов Соре и Дюфора. На конечном отрезке трубы задан постоянный тепловой поток, в остальной части трубы теплоизолирована. Смесь с заданной температурой и концентрацией компонентов поступает в трубу вдали от обогреваемого участка. С помощью линейных преобразований переменных уравнения и граничные условия для температуры и концентрации каждого компонента сведены к задаче, которая полностью совпадает с задачей Греца для однокомпонентной среды. Отдельно изучен случай, когда указанное выше преобразование невозможно. При наличии только эффекта Соре этот случай соответствует равенству теплового и концентрационного чисел Пекле для выбранного компонента смеси. Показано, что при малых числах Пекле неоднородности концентрации, вызванные эффектом Соре, охватывают все поперечное сечение трубы. При больших числах Пекле эти неоднородности сосредоточены в пристеночной области.
8. Впервые установлены закономерности влияния диффузии и термофореза наночастиц на вынужденную конвекцию наножидкости в трубе с заданным потоком тепла на стенке. Исследовалась наножидкость вода — оксид алюминия. Предложено выражение для коэффициента, характеризующего скорость наночастиц под действием термофореза. Выполнено численное моделирование вынужденной конвекции наножидкости в трубе с учетом переменных физических свойств. Проведено сравнение численных результатов с точным решением. Установлено, что термофорез приводит к снижению концентрации наночастиц вблизи стенки трубы. В результате вязкость и теплопроводность наножидкости в этой области уменьшаются. Скорость движения вблизи стенки при этом возрастает, а вблизи оси трубы — уменьшается. Это приводит к снижению необходимого перепада давления в трубе и увеличению коэффициента теплоотдачи. Показано, что с увеличением теплового числа Пекле и интенсивности термофореза ло-

кальный и средний коэффициенты теплоотдачи возрастают. Установлено, что термофорез приводит к росту числа Нуссельта с увеличением концентрации наночастиц, в то время как в отсутствии термофореза число Нуссельта от концентрации наночастиц не зависит. Зависимость коэффициента теплоотдачи от мощности, требуемой для прокачивания теплоносителя через канал, показывает, что наножидкость эффективнее базовой жидкости только при малых мощностях.

9. Рассмотрена задача об устойчивости стационарного термокапиллярного течения в бесконечном жидком мосте (цилиндре). Результаты решения этой задачи, полученные ранее и считающиеся классическими, существенно пересмотрены. Установлено, что помимо гидротепловой волны, распространяющейся в направлении стационарного течения на поверхности, существует еще одна гидротепловая волна, которая распространяется в противоположном направлении. Последняя является наиболее опасной в области больших чисел Прандтля и существенно понижает границу устойчивости. Показано, что новые результаты лучше согласуются с экспериментом на качественном и количественном уровне.
10. Впервые получено прямое экспериментальное подтверждение существования термовибрационных течений в условиях низкой гравитации параболического полета. С помощью цифровой оптической интерферометрии наблюдалась эволюция поля температур в кубической ячейке, подогреваемой сверху и совершающей поступательные вибрации с высокой частотой и малой амплитудой. Структура осредненного поля температур, наблюдаемая экспериментально, подтвердила результаты предыдущих численных исследований. Обнаружено увеличение переноса тепла под действием осредненных термовибрационных течений. Прямое численное моделирование течений в трехмерной постановке и расчеты на основе осредненных двумерных уравнений показали хорошее согласие с экспериментом. Установлены закономерности влияния остаточных ускорений в параболическом полете на перенос тепла и режимы конвекции в полости. Показано,

что конвективные течения, возникающие в поле силы тяжести в неоднородно нагретых жидкостях, могут быть воспроизведены в невесомости с помощью вибрации. Получены простые оценки, выражающие зависимости осредненной скорости, температуры и давления от управляемых параметров и физических свойств жидкости. Полученные результаты использовались при подготовке космического эксперимента IVIDIL, посвященного изучению влияния вибрации на диффузию и термодиффузию в бинарных смесях.

# Литература

- [1] LIENHARD V J.H., LIENHARD IV J.H. A heat transfer textbook. New York: Dover publications, 2011. 765 p.
- [2] TAYLOR R., KRISHNA R. Multicomponent mass transfer. John Wiley & Sons, 1993. 580 p.
- [3] ДЕ ГРООТ С., МАЗУР П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
- [4] ГРЮ К.Э., ИВБС Т.Л. Термическая диффузия в газах. М.: Гос. издательство технико–теоретической литературы, 1956. 184 с.
- [5] WIEGAND S. Thermal diffusion in liquid mixtures and polymer solutions // J. Phys.: Cond. Matter. 2004. V. 16. P. 357–379.
- [6] LUDWIG C. Diffusion zwischen ungleich erwärmten orten gleich zusammengestzter lösungen // Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien Math–Naturw. Kl. 1856. V. 20. P. 539.
- [7] SORET C. Sur l'état d'équilibre que prend au point de vue de sa concentration une dissolution saline primitivement homohéne dont deux parties sont portées a des températures différentes // Arch. Sci. Phys. Nat. 1879. V. 2. P. 48–61.
- [8] ENSKOG D. Über eine verallgemeinerung der zweiten Maxwellschcn theorie der gase. Physikalische Zeitschrift. 1911. V. 12. P. 56–60.
- [9] CHAPMAN S. The kinetic theory of a gas constituted of spherically symmetrical molecules // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1912. V. 211. P. 433–483.
- [10] CHAPMAN S., DOOTSON F.W. A note on thermal diffusion. Philos. Mag. V. 33. 1917. P. 248–253.

- [11] GHORAYEB K., FIROOZABADI A., ANRAKU T. Interpretation of the unusual fluid distribution in the Yufutsu gas-condensate field // SPE J. 2003. V. 8. № 2. P. 114–123.
- [12] MONTEL F. Importance de la thermodiffusion en exploitation et production pétrolières // Entropie. 1994. V. 30. № 184–185. P. 86–93.
- [13] SCHMITT R.W. Double diffusion in oceanography // Annual Rev. Fluid Mech. 1994. V. 26. P. 255–285.
- [14] WALKER D., DELONG S.E. Soret separation in mid-ocean ridge basalt magma // Contrib. Mineralogy and Petrology. 1982. V. 79. P. 231–240.
- [15] NAKADA M.P. A study of the composition of the solar corona and solar wind // Solar physics. 1970. V. 14. P. 457–479.
- [16] BONNER F.J., SUNDELÖF L.O. Thermal diffusion as a mechanism for biological transport // Z. Naturforsch. C. 1984. V. 39. № 6. P. 656–661.
- [17] РАБИНОВИЧ Г.Д., ГУРЕВИЧ Р.Я., БОБРОВА Г.И. Термодиффузионное разделение жидких смесей. Минск: Наука и техника, 1971. 244 с.
- [18] РАБИНОВИЧ Г.Д. Разделение изотопов и других смесей термодиффузией. М.: Атомиздат, 1981. 144 с.
- [19] BEISSWENGER H., BOBER M., SCHUMACHER G. Thermodiffusion in systems  $\text{UO}_2$  and  $\text{CeO}_2$  // J. Nucl. Matter. 1967. V. 21. № 1. P. 38–52.
- [20] АБРАМЕНКО Т.Н., ЗОЛОТУХИНА А.Ф., ШАШКОВ Е.А. Термическая диффузия в газах. Минск: Наука и техника, 1982. 191 с.
- [21] HAASE R. Thermodynamics of irreversible processes. Addison-Wesley Publishing Company, 1969. 509 p.
- [22] KEMPERS L. A thermodynamic theory of the Soret effect in a multicomponent fluid // J. Chem. Phys. 1989. V. 90. P. 6541–6548.

- [23] GHORAYEB K., FIROOZABADI A. Molecular, pressure, and thermal diffusion in non-ideal multicomponent mixtures // AIChE J. 2000. V. 46. № 5. P. 883–891.
- [24] GHORAYEB K., FIROOZABADI A. Theoretical model of thermal diffusion factors in multicomponent mixtures // AIChE J. 2000. V. 46. № 5. P. 892–900.
- [25] SHAPIRO A.A. Evaluation of diffusion coefficients in multicomponent mixtures by means of the fluctuation theory // Physica A. 2003. V. 320. P. 211–234.
- [26] SHAPIRO A.A. Fluctuation theory for transport properties in multicomponent mixtures: thermodiffusion and heat conductivity // Physica A. 2004. V. 332. P. 151–175.
- [27] BAGNOLI M.G.G. Modelling the thermal diffusion coefficients. Ph.D. Thesis, Technical University of Denmark, Denmark, 2004. 188 p.
- [28] PLATTEN J.K. The Soret effect: A review of recent experimental results // J. Appl. Mech. 2006. V. 73. P. 5–15.
- [29] VAN VAERENBERGH S., LEGROS J.C. Diffusion and thermodiffusion in microgravity // Physics of Fluids in Microgravity (edited by R. Monti). London: Taylor & Francis, 2001. P. 178.
- [30] CLUSIUS K., DICKEL G. Neues verfahren zur gasentmischung und isotopen-trennung // Naturwissenschaften. 1938. V. 26. № 33. P. 546.
- [31] PLATTEN J.K., DUTRIEUX J.F., CHAVEPEYER G. Soret effect and free convection: a way to measure Soret coefficients // Lecture Notes in Physics. 2002. V. 584. P. 313–333.
- [32] PLATTEN J.K., BOU-ALI M.M., COSTESÈQUE P., DUTRIEUX J.F., KÖHLER W., LEPPA C., WIEGAND S., WITTKO G. Benchmark values for the Soret, thermal diffusion and diffusion coefficients of three binary organic liquid mixtures // Philos. Mag. 2003. V. 83. № 17–18. P. 1965–1971.

- [33] BÉNARD H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide // Revue générale des Sciences, pures et appliquees. 1900. V. 11. P. 1261–1271, 1309–1328.
- [34] BÉNARD H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent // Ann. Chim. Phys. 1901. V. 23. P. 62–144.
- [35] RAYLEIGH J.W.S. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side // Philos. Mag. Ser. 6. 1916. V. 32, № 192. P. 529–546.
- [36] ГЕРШУНИ Г.З., ЖУХОВИЦКИЙ Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
- [37] ГЕРШУНИ Г.З., ЖУХОВИЦКИЙ Е.М., НЕПОМНЯЩИЙ А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
- [38] PLATTEN J.K., LEGROS J.C. Convection in liquids. Berlin: Springer, 1984. 679 р.
- [39] NEPOMNYASHCHY A., SIMANOVSKII I., LEGROS J.C. Interfacial convection in multilayer system. New York: Springer, 2006. 306 p.
- [40] АНДРЕЕВ В.К., ГАПОНЕНКО Ю.А., ГОНЧАРОВА О.Н., ПУХНАЧЕВ В.В. Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
- [41] АНДРЕЕВ В.К., БЕКЕЖАНОВА В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей. Красноярск: СФУ, 2010. 356 с.
- [42] TURNER J.S. Multicomponent convection // Ann. Rev. Fluid Mech. 1985. V. 17. P. 11–44.
- [43] CROSS M.C., HOHENBERG P.C. Pattern formation outside of equilibrium // Rev. Mod. Phys. 1993. V. 65, № 3. P. 851–1112.

- [44] ПРИГОЖИН И., СТЕНГЕРС И. Порядок из хаоса: новый диалог человека с природой. М.: Прогресс, 1986. 432 с.
- [45] ЗЕНЬКОВСКАЯ С.М., СИМОНЕНКО И.Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР: Механика жидкости и газа. 1966. № 5. С. 51–55.
- [46] GERSHUNI G.Z., LYUBIMOV D.V. Thermal vibrational Convection. New York: Wiley, 1998. 358 p.
- [47] BEYSENS D. Vibrations in space as an artificial gravity? // Europhysicsnews. 1996. V. 37, № 3. P. 22–25.
- [48] SAVINO R., MONTI R. Fluid-dynamics experiment sensitivity to accelerations prevailing on microgravity platforms // Physics of Fluids in Microgravity (edited by R. Monti). London: Taylor & Francis, 2001. P. 515–559.
- [49] SOBAN C.B., PETERSON G.B. Microscale and nanoscale heat transfer: fundamentals and engineering applications. CRC Press, 2008. 433 p.
- [50] DAS S.K., CHOI S.U.S, YU W., PRADEEP T. Nanofluids: science and technology. Hoboken, New Jersey: Wiley–Interscience, 2008. 397 p.
- [51] ТЕРЕХОВ В.И., КАЛИНИНА С.В., ЛЕМАНОВ В.В. Механизм теплопереноса в наножидкостях: современное состояние проблемы. Часть 1. Синтез и свойства наножидкостей // Теплофизика и аэромеханика. 2010. № 1. С. 1–15.
- [52] ТЕРЕХОВ В.И., КАЛИНИНА С.В., ЛЕМАНОВ В.В. Механизм теплопереноса в наножидкостях: современное состояние проблемы. Часть 2. Конвективный теплообмен // Теплофизика и аэромеханика, 2010. № 2. С. 173–188.
- [53] BUONGIORNO J. Convective transport in nanofluids. J. Heat Trans. 2006. V. 128. P. 240–250.
- [54] Ли С. Теория групп преобразований: в 3–х частях. Часть 1. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. 712 с.

- [55] ОВСЯННИКОВ Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1962. 240 с.
- [56] ОВСЯННИКОВ Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
- [57] ИБРАГИМОВ Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
- [58] ОЛВЕР П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
- [59] ФЕЙНМАН Р., ЛЕЙТОН Р., СЭНДС М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 1. Современная наука о природе. Законы механики. Т. 2. Пространство. Время. Движение. М.: Мир, 1977. 440 с.
- [60] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Новосибирск, 1992. 12 с.
- [61] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 30–55.
- [62] АНДРЕЕВ В.К., КАПЦОВ О.В., ПУХНАЧЕВ В.В., РОДИОНОВ А.А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994. 319 с.
- [63] АНДРЕЕВ В.К., БУБЛИК В.В., БЫТЕВ В.О. Симметрии неклассических моделей гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2003. 352 с.
- [64] РЫЖКОВ И.И. Оптимальная система подалгебр для уравнений термодиффузии // Вычислите. технологии. 2004. Т. 9. № 1. С. 95–104.
- [65] АНДРЕЕВ В.К., РЫЖКОВ И.И. Групповая классификация и точные решения уравнений термодиффузии // Дифф. уравнения. 2005. Т. 41. № 4. С. 508–517.
- [66] RYZHKOV I.I. On the normalizers of subalgebras in an infinite Lie algebra // Commun. in nonlinear science and numerical simulation. 2006. V. 11. № 2. P. 172–185.

- [67] Рыжков И.И. Об инвариантных решениях уравнений термодиффузии бинарной смеси в случае плоского движения // ПМТФ. 2006. Т. 47. № 1. С. 95–108.
- [68] RYZHKOV I.I. On double diffusive convection with Soret effect in a vertical layer between co-axial cylinders // Physica D: Nonlinear phenomena. 2006. V. 215. № 2. P. 191–200.
- [69] Рыжков И.И. Инвариантные подмодели и точные решения уравнений термодиффузии: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Красноярск, 2005. 168 с.
- [70] RYZHKOV I.I., SHEVTSOVA V.M. On thermal diffusion and convection in multicomponent mixtures with application to the thermogravitational column // Phys. Fluids. 2007. V. 19. № 2. 027101.
- [71] RYZHKOV I.I. Symmetry analysis of equations for convection in binary mixture // J. Siberian Federal University. 2008. V. 1. № 4. P. 410–431.
- [72] MELNIKOV D.E., RYZHKOV I.I., MIALDUN A., SHEVTSOVA V. Thermovibrational convection in microgravity: preparation of a parabolic flight experiment // Micrograv. Sci. Tech. 2008. V. 20. P. 29–39.
- [73] MIALDUN A., RYZHKOV I.I., MELNIKOV D.E., SHEVTSOVA V. Experimental evidence of thermal vibrational convection in non-uniformly heated fluid in a reduced gravity environment // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. 084501.
- [74] RYZHKOV I.I., SHEVTSOVA V.M. On the cross-diffusion and Soret effect in multicomponent mixtures // Micrograv. Sci. Tech. 2009. V. 21. № 1–2. P. 37–40.
- [75] RYZHKOV I.I., SHEVTSOVA V.M. Long-wave instability of a multicomponent fluid layer with the Soret effect // Phys. Fluids. 2009. V. 21. № 1. 014102.
- [76] RYZHKOV I.I., SHEVTSOVA V.M. Convective stability of multicomponent fluids in the thermogravitational column // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. № 2. 026308.

- [77] АНДРЕЕВ В.К., БЕКЕЖАНОВА В.Б., ЕФИМОВА М.В., РЫЖКОВ И.И., СТЕПАНОВА И.В. Неклассические модели конвекции: точные решения и их устойчивость // Вычислите. технологии. 2009. Т. 14. № 6. С. 5–18.
- [78] SHEVTSOVA V., GAPONENKO Y., MELNIKOV D., RYZHKOV I.I., MIALDUN A. Study of thermoconvective flows induced by vibrations in reduced gravity // Acta Astronautica. 2010. V. 66. № 1–2. P. 166–173.
- [79] SHEVTSOVA V., RYZHKOV I.I., MELNIKOV D., GAPONENKO Y., MIALDUN A. Experimental and theoretical study of vibration-induced convection in low gravity // J. Fluid Mech. 2010. V. 648. P. 53–82.
- [80] RYZHKOV I.I., GAPONENKO Y.A. On the Boussinesq approximation in the problems of convection induced by high frequency vibration // J. Siberian Federal University. 2010. V. 3. № 4. P. 433–449.
- [81] SHEVTSOVA V., MIALDUN A., MELNIKOV D., RYZHKOV I., GAPONENKO Y., SAGHIR Z., LYUBIMOVA T., LEGROS J.C. The IVIDIL experiment on-board the ISS: Thermal diffusion in the presence of controlled vibration // Comptes Rendus Mecanique. 2011. V. 339. № 5. P. 310–317.
- [82] РЫЖКОВ И.И., СТЕПАНОВА И.В. Групповые свойства и точные решения модели вибрационной конвекции бинарной смеси // ПМТФ. 2011. Т. 52. № 4. С. 72–83.
- [83] RYZHKOV I.I. Thermocapillary instabilities in liquid bridges revisited // Phys. Fluids. 2011. V. 23. № 8. 082103.
- [84] РЫЖКОВ И.И. Длинноволновая неустойчивость плоского слоя многокомпонентной смеси с эффектом Cope // Изв. РАН: МЖГ. 2013. № 4. С. 64–79.
- [85] RYZHKOV I.I. The extended Graetz problem with specified heat flux for multicomponent fluids with Soret and Dufour effects // Int. J. Heat Mass Trans. 2013. V. 66. P. 461–471.

- [86] Рыжков И.И. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2013. 200 с.
- [87] Рыжков И.И. Групповая классификация уравнений термодиффузии // Материалы конференции молодых ученых ИВМ СО РАН. Красноярск. 2003. С. 62–72.
- [88] Рыжков И.И. Групповой анализ уравнений термодиффузии в двумерном случае // Материалы конференции молодых ученых ИВМ СО РАН. Красноярск. 2004. С. 46–49.
- [89] Рыжков И.И. Построение оптимальной системы подалгебр для уравнений термодиффузии в специальном случае // Труды 35-ой Региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики". Екатеринбург. 2004. С. 160–164.
- [90] RYZHKOV I.I. Symmetry analysis of the thermal diffusion equations in the planar case // Proceedings of 10th International Conference on Modern Group Analysis. Larnaca, Cyprus. 2005. P. 182–189.
- [91] RYZHKOV I.I. On convection in binary mixture with Soret and Dufour effects // Proceedings of 7th International Meeting on Thermal Diffusion. San–Sebastian, Spain, 2006. P. 103–111.
- [92] RYZHKOV I.I., SHEVTSOVA V.M., VAN VAERENBERGH S. On thermal diffusion in ternary mixture // Proceedings of 7th International Meeting on Thermal Diffusion. San–Sebastian, Spain. 2006. P. 219–229.
- [93] RYZHKOV I.I., SHEVTSOVA V.M. Stability of multicomponent convection in vertical layer with thermal diffusion // Proceedings of 8th International Meeting on Thermal diffusion. Bonn, Germany. 2008. P. 249–254.
- [94] SHEVTSOVA V., RYZHKOV I.I., MIALDUN A., MELNIKOV D., GAPONENKO Y. Experimental study of thermo-vibrational convection in reduced gravity

// Proceedings of 59th International Astronautical Congress. Glasgow, Great Britain, 2008. IAC-08.A2.2.4.

- [95] STEPANOVA I.V., RYZHKOV I.I. Symmetries of equations for vibrational convection in binary mixture // Proceedings of 5th International Workshop in Group Analysis of Differential Equations and Integrable System. Cyprus, Protaras. 2010. P. 200–206.
- [96] Рыжков И.И., Минаков А.В. Исследование процессов переноса тепла и наночастиц в наножидкостях в условиях вынужденной конвекции // Материалы конференции молодых ученых ИВМ СО РАН. Красноярск. 2013. С. 122–137.
- [97] Рыжков И.И., Минаков А.В. Влияние термодиффузии наночастиц на вынужденную конвекцию в миниканалах // Тезисы докладов XVIII Зимней школы по механике сплошных сред. Пермь. 2013. С. 297.
- [98] CUSSLER E.L. Diffusion: mass transfer in fluid systems. 3rd Edition. Cambridge University Press, 2009. 631 p.
- [99] WILD A. Multicomponent diffusion in liquids. Düsseldorf: VDI Verlag, 2003. 115 p.
- [100] LEAL L.G. Advanced transport phenomena: fluid mechanics and convective transport processes. Cambridge University Press, 2007. 912 p.
- [101] BERNE B.J., PECORA R. Dynamic light scattering with applications to chemistry, biology, and physics. Toronoto: General Publishing Company, 2000. 377 p.
- [102] WAKEHAM W.A., NAGASHIMA A., SENGERS J.V. Measurement of the transport properties of fluids. Experimental Thermodynamics. Vol. III, Chapter 9. Blackwell Scientific Publications, Oxford, 1991.
- [103] IVANOV D.A., GROSSMANN T., WINCKELMANN J. Comparison of ternary diffusion coefficients obtained from dynamic light scattering and Taylor dispersion // Fluid Phase Equilibria. 2005. V. 228–229. P. 283–291.

- [104] SECHENYH V., LEGROS J.C., SHEVTSOVA V.M. Development and validation of a new setup for measurements of diffusion coefficients in ternary mixtures using the Taylor dispersion technique // Comptes Rendus Mecanique. 2013. V. 341. P. 490–496.
- [105] KOLODNER P., WILLIAMS H., MOE C. Optical measurement of the Soret coefficient of ethanol/water solutions // J. Chem. Phys. 1988. V. 88. P. 6512–6524.
- [106] HAUGEN K.B., FIROOZABADI A. On measurement of molecular and thermal diffusion coefficients in multicomponent mixtures // J. Phys. Chem. B. 2006. V. 110. P. 17678–17682.
- [107] KÖNIGER A., WUNDERLICH H., KÖHLER W. Measurement of diffusion and thermal diffusion in ternary fluid mixtures using a two-color optical beam deflection technique // J. Chem. Phys. 2010. V. 132. 174506.
- [108] MIALDUN A., SHEVTSOVA V. Measurement of the Soret and diffusion coefficients for benchmark binary mixtures by means of digital interferometry // J. Chem. Phys. 2011. V. 134. 044524.
- [109] Бузмаков В.М., Пинягин А.Ю., Пшеничников А.Ф. Методика одновременного измерения коэффициентов Соре и диффузии жидких растворов // ИФЖ. 1983. Т. 44. № 5. С. 779–783.
- [110] CABRERA H., MARTÍ-LÓPEZ L., SIRA E., RAHN K., GARCÍA-SUCRE M. Thermal lens measurement of the Soret coefficient in acetone/water mixtures // J. Chem. Phys. 2009. V. 131. 031106.
- [111] KITA R., WIEGAND S., LUETTMER-STRATHMANN J. Sign change of the Soret coefficient of poly (ethylene-oxide) in water/ethanol mixtures observed by thermal diffusion forced Rayleigh scattering // J. Chem. Phys. 2004. V. 121. P. 3874–3885.

- [112] PLATTEN J.K., MARCOUX M., MOJTABI A. The Rayleigh–Benard problem in extremely confined geometries with and without the Soret effect // Comptes Rendus Mecanique. 2007. V. 335. P. 638–654.
- [113] KORSCHING H. Trennung von benzol und hexadeuterobenzol durch thermodiffusion in der flüssigkeit // Naturwissenschaften 1943. V. 31. № 29–30. P. 348–349.
- [114] FURRY W.H., JONES R.C., ONSAGER L. On the theory of isotope separation by thermal diffusion // Phys. Rev. 1939. V. 55. P. 1083–1095.
- [115] HORNE F.H., BEARMAN R.J. Thermogravitational thermal diffusion in liquids. I. The formal theory // J. Chem. Phys. 1962. V. 37. № 12. P. 2842–2857.
- [116] HORNE F.H., BEARMAN R.J. Thermogravitational thermal diffusion in liquids. IV. Revised formula for the forgotten effect and recalculated thermal diffusion factors // J. Chem. Phys. 1968. V. 49. № 12. P. 2457–2459.
- [117] НИКОЛАЕВ Б.И., ТУБИН А.А. Влияние изменения плотности от концентрации на разделение жидких смесей в термодиффузионных колоннах // ИФЖ. 1970. Т. 18. № 5. С. 790–794.
- [118] NAVARRO J.L., MADARIAGA J.A., SAVIRÓN J.M. The forgotten effect in liquid thermal diffusion columns // J. Phys. A: Math. Gen. 1982. V. 15. P. 1683–1687.
- [119] VALENCIA J., BOU-ALI M.M., ECENARRO O., MADARIAGA J.A., SANTAMARÍA C.M. Validity limits of the FJO thermogravitational column theory // Lecture Notes in Physics. 2002. V. 584. P. 233–249.
- [120] DUTRIEUX J.F., PLATTEN J.K., CHAVEPEYER G., BOU-ALI M.M. On the measurement of positive Soret coefficients // J. Phys. Chem. B. 2002. V. 106. P. 6104–6114.
- [121] LABROSSE G. Free convection of binary liquid with variable Soret coefficient in thermogravitational column: The steady parallel base states // Phys. Fluids. 2003. V. 15. № 9. P. 2694–2727.

- [122] PLATTEN J.K., BOU-ALI M.M., DUTRIEUX J.F. Enhanced molecular separation in inclined thermogravitational columns // *J. Phys. Chem. B.* 2003. V. 107. P. 11763–11767.
- [123] КОСТАРЕВ К.Г., ПШЕНИЧИНИКОВ А.Ф. Влияние свободной конвекции на термодиффузию в жидкой смеси, заполняющей наклонную прямоугольную полость // *ПМТФ*. 1986. № 5. С. 73–75.
- [124] ONSAGER L., WATSON W.W. Turbulence on convection in gases between concentric vertical cylinders // *Phys. Rev.* 1939. V. 56. P. 474–477.
- [125] НИКОЛАЕВ Б.И., ТУБИН А.А. Об устойчивости конвективного течения бинарной смеси в плоской термодиффузионной колонне // *ПММ*. 1971. Т. 35. Вып. 2. С. 248–254.
- [126] ZEBIB A. Convective instabilities in thermogravitational columns // *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 2007. V. 32. P. 211–219.
- [127] ZEBIB A., BOU-ALI M.M. Inclined layer Soret instability // *Phys. Rev. E*. 2009. V. 79. 056305.
- [128] BOU-ALI M.M., ECENARRO O., MADARIAGA J.A., SANTAMARÍA C.M. Stability of convection in a vertical binary fluid layer with an adverse density gradient // *Phys. Rev. E*. 1999. V. 59. № 1. P. 1250–1252.
- [129] BOU-ALI M.M., ECENARRO O., MADARIAGA J.A., SANTAMARÍA C.M., VALENCIA J. Measurement of negative Soret coefficients in a vertical fluid layer with an adverse density gradient // *Phys. Rev. E*. 2000. V. 62. № 1. P. 1420–1423.
- [130] BATISTE O., ALONSO A., MERCADER I. Hydrodynamic stability of binary mixtures in Benard and thermogravitational cells // *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 2004. V. 29. P. 359–375.
- [131] ЗАМСКИЙ Б.Н., РАБИНОВИЧ Г.Д. Уравнения переноса в термодиффузионной колонне для многокомпонентных смесей // *ИФЖ*. 1979. Т. 36. № 4. С. 668–675.

- [132] MARCOUX M., CHARRIER-MOJTABI M.C. Résolution analytique du problème de la diffusion thermogravitationnelle dans un mélange ternaire // Entropie. 1999. V. 218. P. 13–17.
- [133] HAUGEN K., FIROOZABADI A. On measurement of thermal diffusion coefficients in multicomponent mixtures // J. Chem. Phys. 2005. V. 122. 014516.
- [134] LEAHY-DIOS A., BOU-ALI M.M., PLATTEN J.K., FIROOZABADI A. Measurements of molecular and thermal diffusion coefficients in ternary mixtures // J. Chem. Phys. 2005. V. 122. 234502.
- [135] HAUGEN K., FIROOZABADI A. Transient separation of multicomponent liquid mixtures in thermogravitational columns // J. Chem. Phys. 2007. V. 127. 154507.
- [136] ГЕРШУНИ Г.З., ЖУХОВИЦКИЙ Е.М. О конвективной неустойчивости двухкомпонентной смеси в поле силы тяжести // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 2. С. 301–308.
- [137] HURLE D.T.J., JAKEMAN E. Soret–driven thermosolutal convection // J. Fluid Mech. 1970. V. 47. P. 667–687.
- [138] SCHECHTER R.S., PRIGOGINE I., HAMM J.R. Thermal diffusion and convective stability // Phys. Fluids. 1972. V. 15. № 3. P. 379–386.
- [139] LEGROS J.C., PLATTEN J.K., POTY P.G. Stability of a two-component fluid layer heated from below // Phys. Fluids. 1972. V. 15. № 8. P. 1383–1390.
- [140] KNOBLOCH E., MOORE D.R. Linear stability of experimental Soret convection // Phys. Rev. A. 1988. V. 37. № 3. P. 860–870.
- [141] LEE G.W.T., LUCAS P., TYLER A. Onset of Rayleigh–Bénard convection in binary liquid mixtures of  $^3\text{He}$  in  $^4\text{He}$  // J. Fluid Mech. 1983. V. 135. P. 235–259.
- [142] DOMINGUEZ-LERMA M.A., AHLERS G., CANNELL D.S. Rayleigh–Bénard convection in binary mixtures with separation ratios near zero // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. № 6. P. 6159–6174.

- [143] BARTEN W., LÜCKE M., KAMPS M., SCHMITZ R. Convection in binary fluid mixtures. I. Extended travelling-wave and stationary states // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. № 6. P. 5636–5661.
- [144] BARTEN W., LÜCKE M., KAMPS M., SCHMITZ R. Convection in binary fluid mixtures. II. Localized travelling waves // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. № 6. P. 5662–5680.
- [145] MOSES E., STEINBERG V. Flow patterns and nonlinear behavior of traveling waves in a convective binary fluid // Phys. Rev. A. 1986. V. 34. № 1. P. 693–696.
- [146] WINKLER B.L., KOLODNER P. Measurements of the concentration field in nonlinear travelling-wave convection // J. Fluid Mech. 1992. V. 240. P. 31–58.
- [147] SHEVTSOVA V.M., MELNIKOV D.E., LEGROS J.C. Onset of convection in Soret–driven instability // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. 047302.
- [148] KIM M.C., CHOI C.K., YEO J.K. The onset of Soret–driven convection in a binary mixture heated from above // Phys. Fluids. 2007. V. 19. № 8. 084103.
- [149] PEARLSTEIN A.J., HARRIS R.M., TERRONES G. The onset of convective instability in a triply diffusive fluid layer // J. Fluid Mech. 1989. V. 202. P. 443–465.
- [150] TERRONES G., PEARLSTEIN A.J. The onset of convection in a multicomponent fluid layer // Phys. Fluids A. 1989. V. 1. № 5. P. 845–853.
- [151] LOPEZ A.R., ROMERO L.A., PEARLSTEIN A.J. Effect of rigid boundaries on the onset of convective instability in a triply diffusive fluid layer // Phys. Fluids A. 1990. V. 2. № 6. P. 897–902.
- [152] TERRONES G. Cross-diffusion effects on the stability criteria in a triply diffusive system // Phys. Fluids A. 1993. V. 5. № 9. P. 2172–2182.
- [153] LARRE J.P., PLATTEN J.K., CHAVEPEYER G. Soret effects in ternary systems heated from below // Int. J. Heat Mass Trans. 1997. V. 40. № 3. P. 545–555.

- [154] VITAGLIANO P.L., ROSCIGNO P., VITAGLIANO V. Diffusion and convection in a four-component liquid system // Energy. 2005. V. 30. P. 845–859.
- [155] ЖАВРИН Ю.И., КОСОВ Н.Д., БЕЛОВ С.М., ТАРАСОВ В.Б. Влияние давления на устойчивость диффузии в некоторых трехкомпонентных газовых смесях // ЖТФ. 1984. Т. 54. № 5. С. 943–947.
- [156] КОСОВ В.Н., СЕЛЕЗНЕВ В.Д., ЖАВРИН Ю.И. О диффузионной неустойчивости в изотермических трехкомпонентных газовых смесях // Теплофизика и аэромеханика. 2000. Т. 7. № 1. С. 127–135.
- [157] ЖАВРИН Ю.И., КОСОВ В.Н., СЕЛЕЗНЕВ В.Д. Аномальная гравитационная неустойчивость механического равновесия при диффузионном смещении в изотермических трехкомпонентных газовых смесях // Известия РАН: МЖГ. 2000. Т. 35. № 3. С. 185–192.
- [158] CASTILLO J.L., VELARDE M.G. Thermal diffusion and the Marangoni–Bénard instability of a two-component fluid layer heated from below // Phys. Lett. A. 1978. V. 66. № 6. P. 489–491.
- [159] CHEN C.F., CHEN C.C. Effect of surface tension on the stability of a binary fluid layer under reduced gravity // Phys. Fluids. 1994. V. 6. № 4. P. 1482–1490.
- [160] SKARDA J.R.L., JACOMIN D., McCUAUGHAN F.E. Exact and approximate solutions to the double-diffusive Marangoni–Benard problem with cross-diffusive terms // J. Flud. Mech. 1998. V. 366. P. 109–133.
- [161] РЯБИЦКИЙ Е.А. Возникновение термокапиллярного движения в плоском слое с учетом эффекта Сопе // Изв. РАН: МЖГ. 2000. Т. 35. № 3. С. 3–9.
- [162] MCFADDEN G.B., CORIELL S.R., LOTT P.A. Onset of convection in two layers of binary fluid // J. Fluid Mech. 2010. V. 647. P. 105–124.

- [163] BRATSUN D.A., DE WIT A. On Marangoni convective patterns driven by an exothermic chemical reaction in two-layer system // Phys. Fluids. 2004. V. 16. № 4. P. 1082–1096.
- [164] BRATSUN D.A., DE WIT A. Buoyancy–driven pattern formation in reactive immiscible two–layer system // Chem. Eng. Sci. 2011. V. 66. P. 5723–5734.
- [165] ECKERT K., ACKER M., SHI Y. Chemical pattern formation driven by a neutralization reaction. I. Mechanism and basic features // Phys. Fluids. 2004. V. 16. № 2. P. 385–399.
- [166] ГЛУХОВ А.Ф., ДЕМИН В.А., ПУТИН Г.Ф. Разделение смесей и тепломассоперенос в связанных каналах // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. Вып. 17. С. 45–51.
- [167] ГЛУХОВ А.Ф., ДЕМИН В.А., ПУТИН Г.Ф. О разделении смесей в связанных каналах // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 1. С. 68–77.
- [168] ГЕРШУНИ Г.З., ЖУХОВИЦКИЙ Е.М., СОРОКИН Л.Е. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного течения бинарной смеси // ПММ. 1980. Т. 44, Вып. 5. С. 823–830.
- [169] WIRTZ R.A., REDDY C.S. Experiments on convective layer formation and merging in a differentially heated slot // J. Fluid Mech. 1979. V. 91. P. 451–464.
- [170] YANASE S., KOHNO K. The effect of salinity gradient on the instability of natural convection in a vertical fluid layer // J. Phys. Soc. of Japan. V. 54. № 10. P. 3747–3756.
- [171] ГЕРШУНИ Г.З., ЖУХОВИЦКИЙ Е.М., СОРОКИН Л.Е. Об устойчивости конвективного течения бинарной смеси с термодиффузией // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 66–71.
- [172] СИМОНЕНКО И.Б. Обоснование метода осреднения для задачи конвекции в поле быстроосцилирующих сил и для других параболических уравнений // Мат. сборник. 1972. Т. 87. № 2. С. 236–253.

- [173] ГЕРШУНИ Г.З., ЖУХОВИЦКИЙ Е.М. О конвективной неустойчивости жидкости в вибрационном поле в невесомости // Изв. АН СССР: МЖГ. 1981. № 4. С. 12–19.
- [174] БРАВЕРМАН Л.М. О некоторых типах вибрационно–конвективной неустойчивости плоского слоя жидкости в невесомости // Изв. АН СССР: МЖГ. 1987. № 5. С. 4–7.
- [175] ЗАВАРЫКИН М.П., ЗОРИН С.В., ПУТИН Г.Ф. Экспериментальное исследование вибрационной конвекции // Докл. АН СССР. 1985. Т. 281. № 4. С. 815–816.
- [176] ЗАВАРЫКИН М.П., ЗОРИН С.В., ПУТИН Г.Ф. О термоконвективной неустойчивости в вибрационном поле // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 309–312.
- [177] DEMIN V.A., GERSHUNI G.Z., VERKHOLANTSEV I.V. Mechanical quasiequilibrium and thermovibrational convective instability in an inclined fluid layer // Int. J. Heat Mass Trans. 1996. V. 39. № 9. P. 1979–1991.
- [178] GERSHUNI G.Z., KOLESNIKOV A.K., LEGROS J.C., MYZNIKOVA B.I. On vibrational convective instability of a horizontal, binary mixture layer with Soret effect // J. Fluid Mech. 1997. V. 330. P. 251–269.
- [179] ШАРИФУЛЛИН А.Н. Устойчивость конвективного движения в вертикальном слое при наличии продольных вибраций // Изв. АН СССР: МЖГ. 1983. № 2. с. 186–188.
- [180] ГНЕВАНОВ Н.В., СМОРОДИН Б.Л. Конвективная неустойчивость течения бинарной смеси в условиях вибрации и термодиффузии // ПМТФ. 2006. Т. 47. № 2. С. 77–84.
- [181] ГЕРШУНИ Г.З., ЖУХОВИЦКИЙ Е.М. Плоскопараллельные адвективные течения в вибрационном поле // ИФЖ. 1989. Т. 56. № 2. С. 238–241.

- [182] БИРИХ Р.В., КАТАНОВА Т.Н. Влияние высокочастотных вибраций на устойчивость адвективного течения // Изв. РАН: МЖГ. 1998. № 1. С. 16–22.
- [183] БИРИХ Р.В. О вибрационной конвекции в плоском слое с продольным градиентом температуры // Изв. АН СССР: МЖГ. 1990. № 4. С. 12–15.
- [184] МЫЗНИКОВА Б.И., СМОРОДИН Б.Л. О конвективной устойчивости горизонтального слоя двухкомпонентной смеси в модулированном поле внешних сил // Изв. РАН: МЖГ. 2001. № 1. С. 3–13.
- [185] SMORODIN B.L, MYZNIKOVA B.I., LEGROS J.C. Evolution of convective patterns in a binary-mixture layer subjected to a periodical change of the gravity field // Phys. Fluids. 2008. V. 20. № 9. 094102.
- [186] МЫЗНИКОВА Б.И., СМОРОДИН Б.Л. Длинноволновая неустойчивость течения бинарной смеси в вертикальном канале при наличии вибрации // Изв. РАН: МЖГ. 2009. № 2. С. 80–91.
- [187] LYUBIMOV D.V., BRATSUN D.A., LYUBIMOVA T.P., ROUX B. Influence of gravitational preception of solid particles on thermal buoyancy convection // Adv. Space Res. 1998. V. 22. № 8. P. 1267–1270.
- [188] БРАЦУН Д.А., ТЕПЛОВ В.С. О параметрическом возбуждении вторичного течения в вертикальном слое жидкости в присутствии мелких твердых частиц // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 1. С. 48–55.
- [189] ГЕРШУНИ Г.З., ЖУХОВИЦКИЙ Е.М., ЮРКОВ Ю.С. О вибрационной тепловой конвекции в прямоугольной области // Изв. АН СССР: МЖГ. 1982. № 4. С. 94–99.
- [190] CHERNATYNSKY V.I., GERSHUNI G.Z., MONTI R. Transient regimes of thermovibrational convection in a closed cavity // Micrograv. Quart. 1993. V. 3. № 1. P. 55–67.
- [191] SAVINO R., MONTI R., PICCIRILLO M. Thermovibrational convection in a fluid cell // Computers & fluids. 1998. V. 27. № 8. P. 923–939.

- [192] HIRATA K., SASAKI T., TANIGAWA H. Vibrational effects on convection in a square cavity at zero gravity // J. Fluid Mech. 2001. V. 445. P. 327–344.
- [193] CISSE I., BARDAN G. МОЈТАВІ А. Rayleigh Bénard convective instability of a fluid under high-frequency vibration // Int. J. Heat Mass Trans. 2004. V. 47. № 19–20. P. 4101–4112.
- [194] БАВУШКИН И.А., ДЕМИН В.А. Вибрационная конвекция в ячейке Хеле–Шоу. Теория и эксперимент // ПМТФ. 2006. Т. 47. № 2. С. 40–48.
- [195] БАВУШКИН И.А., ДЕМИН В.А. К вопросу о вибрационно–конвективных течениях в ячейке Хеле–Шоу // ИФЖ. 2008. Т. 81. № 4. С. 1–9.
- [196] ИВАНОВА А.А., КОЗЛОВ В.Г. Вибрационная тепловая конвекция при непоступательных колебаниях полости // Известия РАН: МЖГ. 2003. № 3. С. 26–43.
- [197] SAVINO R., MONTI R. Convection induced by residual-g and g-jitters in diffusion experiments // Int. J. Heat Mass Trans. 1999. V. 42. № 1. P. 111–126.
- [198] LYUBIMOVA T., SHKLYAEVA E., LEGROS J.C., SHEVTSOVA V., ROUX B. Numerical study of high frequency vibration influence on measurement of Soret and diffusion coefficients in low gravity conditions // Adv. Space Res. 2005. V. 36. P. 70–74.
- [199] SHEVTSOVA V., MELNIKOV D., LEGROS J.C., YAN Y., SAGHIR Z., LYUBIMOVA T., SEDELNIKOV G., ROUX B. Influence of vibrations on thermodiffusion in binary mixture: A benchmark of numerical solutions // Phys. Fluids. 2007. V. 19. № 1. 017111.
- [200] MAZZONI S., SHEVTSOVA V., MIALDUN A., MELNIKOV D., GAPONENKO YU., LYUBIMOVA T., SAGHIR M.Z. Vibrating liquids in space // Europhysic-snews. 2010. V. 41. № 6. P. 14–16.
- [201] ЗЮЗГИН А.В., ИВАНОВ А.И., ПОЛЕЖАЕВ В.И., ПУТИН Г.Ф., СОБОЛЕВА Е.В. Конвективные движения в околокритической жидкости в

условиях реальной невесомости // Космич. исслед. 2001. Т. 39. № 2. С. 188–201.

- [202] GARRABOS Y., BEYSENS D., LECOUTRE C., DEJOAN A., POLEZHAEV V., EMELIANOV V. Thermoconvectional phenomena induced by vibrations in supercritical SF<sub>6</sub> under weightlessness // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. № 5. 056317.
- [203] БАБУШКИН И.А., БОГАТЫРЕВ Г.П., ГЛУХОВ А.Ф., ПУТИН Г.Ф., АВДЕЕВ С.В., ИВАНОВ А.И., МАКСИМОВА М.М. Изучение тепловой конвекции и низкочастотных микроускорений на орбитальном комплексе "Мир" с помощью датчика "Дакон" // Космич. исслед. 2001. Т. 32. № 2. С. 161–169.
- [204] NAUMANN R. J., HAULENBEEK G., KAWAMURA H., MATSUNAGA K. The JUSTSAP experiment on STS-95 // Micrograv. Sci. Tech. 2002. V. 13. № 2. P. 22–32.
- [205] KABOVA Y.O., KUZNETSOV V.V., KABOV O.A. Gravity effect on the locally heated liquid film driven by gas flow in an inclined minichannel // Micrograv. Sci. Tech. 2008. V. 20. P. 187–192.
- [206] KABOVA Y.O., KUZNETSOV V.V., KABOV O.A. The effect of gravity and shear stress on a liquid film driven in a horizontal minichannel at local heating // Micrograv. Sci. Tech. 2009. V. 21. S1. P. 145–152.
- [207] GATAPOVA E.Y., KABOV O.A. Shear-driven flows of locally heated liquid films // Int. J. Heat Mass Trans. 2008. V. 51. № 19–20. P. 4797–4810.
- [208] КАБОВ О.А., КАБОВА Ю.О., КУЗНЕЦОВ В.В. Испарение неизотермической пленки жидкости в микроканале при спутном потоке газа // Доклады РАН. 2012. Т. 446. № 5. С. 522–526.
- [209] KUMAR DAS S., CHOI S.U.S., PATEL H.E. Heat transfer in nanofluids - a review // Heat trans. engineering. 2006. V. 27. № 10. P. 3–19.

- [210] EASTMAN J.A., CHOI S.U.S., LI S., YU W., THOMPSON L.J. Anomalous increased effective thermal conductivities of ethylene glycol-based nanofluids containing copper nanoparticles // Appl. Phys. Lett. 2001. V. 78. № 6. P. 718–720.
- [211] CHOI S.U.S., ZHANG Z.G., YU W., LOCKWOOD F.E., GRULKE E.A. Anomalous thermal conductivity enhancement in nanotube suspensions // Appl. Phys. Lett. 2001. V. 79. № 14. P. 2252–2254.
- [212] CHOI S.U.S. Nanofluids: from vision to reality through research // J. Heat Trans. 2009. V. 131. № 3. 033106.
- [213] BUONGIORNO J. ET AL. A benchmark study of thermal conductivity in nanofluids // J. Appl. Phys. 2009. V. 106. № 9. 094312.
- [214] CHANDRASEKAR M., SURESH S. A review on the mechanisms of heat transport in nanofluids // Heat Trans. Engineering. 2009. V. 30. № 14. P. 1136–1150.
- [215] XUE Q.Z. Model for effective thermal conductivity of nanofluids // Phys. Lett. A. 2003. V. 307. P. 313–317.
- [216] YU W.H., CHOI S.U.S. The role of interfacial layers in the enhanced thermal conductivity of nanofluids: A renovated Hamilton–Crosser model // J. Nanopart. Res. 2004. V. 6. P. 355–361.
- [217] KHANAFER K., VAFAI K. A critical synthesis of thermophysical characteristics of nanofluids // Int. J. Heat Mass Trans. 2011. V. 54. № 19–20. P. 4410–4428.
- [218] Рудяк В.Я., БЕЛКИН А.А., ЕГОРОВ В.В. Об эффективной вязкости наносуспензий // ЖТФ. 2009. Т. 79. № 8. С. 18–25.
- [219] EINSTEIN A. Eine neue bestimmung der moleküldimensionen // Ann. Phys. 1906. V. 19. P. 289–306.

- [220] YU W.H., FRANCE D.M., ROUTBORT J.L., CHOI S.U.S. Review and comparison of nanofluid thermal conductivity and heat transfer enhancements // Heat Trans. Engineering. 2008. V. 29. № 5. P. 432–460.
- [221] DITTUS F., BOELTER L. Heat transfer in automobile radiators of the tubular type // Int. Commun. Heat Mass Trans. 1985. V. 12. P. 3–22.
- [222] DING Y., ALIAS H., WEN D., WILLIAMS R. Heat transfer of aqueous suspensions of carbon nanotubes (CNT nanofluids) // Int. J. Heat Mass Trans. 2006. V. 49. № 1–2. P. 240–250.
- [223] YU W., FRANCE D.M., TIMOFEEVA E.V., SINGH D., ROUTBORT J.L. Thermophysical property-related comparison criteria for nanofluid heat transfer enhancement in turbulent flow // Appl. Phys. Lett. 2010. V. 96. 213109.
- [224] UTOMO A.T., HAGHIGHI E.B., ZAVAREH A.I.T., GHANBARPOURGERAVI M., POTI H., KHODABANDEH R., PALM B., PACEK A.W. The effect of nanoparticles on laminar heat transfer in a horizontal tube // Int. J. Heat Mass Trans. 2014. V. 69. P. 77–91.
- [225] MAÏGA S.B., PALM S.J., NGUYEN C.T., ROY G., GALANIS N. Heat transfer enhancement by using nanofluids in forced convection flows // Int. J. Heat Fluid Flow. 2005. V. 26. № 4. P. 530–546.
- [226] XUAN Y., ROETZEL W. Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids // Int. J. Heat Mass Trans. 2000. V. 43. № 19. P. 3701–3707.
- [227] MCNAB G.S., MEISEN A. Thermophoresis in liquids // J. Colloid Interface Sci. 1973. V. 44. № 2. P. 339–346.
- [228] EPSTEIN P.S. Zur theorie des radiometers // Z. Physik. 1929. V. 54. P. 537–563.
- [229] PIAZZA R., PAROLA A. Thermophoresis in colloidal suspensions // J. Phys.: Cond. Matter. 2008. V. 20. 153102.
- [230] WÜRGER A. Thermal non-equilibrium transport in colloids // Rep. Prog. Phys. 2010. V. 73. 126601.

- [231] GALLIERO G. Thermodiffusion in model nanofluids by molecular dynamics simulations // J. Chem. Phys. 2008. V. 128. № 6. 064505.
- [232] WEN D., DING Y. Effect of particle migration on heat transfer in suspensions of nanoparticles flowing through minichannels // Microfluid nanofluid. 2005. V. 1. P. 183–189.
- [233] WEN D., ZHANG L., HE Y. Flow and migration of nanoparticle in a single channel // Heat Mass Trans. 2009. V. 45. P. 1061–1067.
- [234] HEYHAT M.M., KOWSARY F. Effect of particle migration on flow and convective heat transfer of nanofluids flowing through a circular pipe // J. Heat Trans. 2010. V. 132. 062401.
- [235] CHEIN R., CHUANG J. Experimental microchannel heat sink performance studies using nanofluids // Int. J. Thermal Sci. 2007. V. 46. № 1. P. 57–66.
- [236] HWANG K.S., JANG S.P., CHOI S.U.S. Flow and convective heat transfer characteristics of water-based Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> nanofluids in fully developed laminar flow regime // Int. J. Heat Mass Trans. 2009. V. 52. № 1–2. P. 193–199.
- [237] GRAETZ L. Über die Wärmeleitungsähigkeit von Flüssigkeiten // Annalen der Physik und Chemie. 1885. V. 25. № 7. P. 337–357.
- [238] NUSSELT W. Die Abhaangigkeit der Wärmeübergangszahl Von der Rohrlaange // Zeitscher VDI. 1910. V. 54. P. 1154–1158.
- [239] HENNECKE D.K. Heat transfer by Hagen-Poiseuille flow in the thermal development region with axial conduction // Wärme- und Stoffübertragung. 1968. V. 1. P. 177–184.
- [240] SINGH S.N. The determination of eigen-functions of a certain Sturm–Liouville equation and its application to problems of heat transfer // Appl. Sci. Res. Sec A. 1958. V. 7 P. 237–250.
- [241] ШАПОВАЛОВ В.В. Теплообмен при течении несжимаемой жидкости в круглой трубе с учетом осевой растечки тепла при граничных условиях

1-го и 2-го рода на поверхности трубы // ИФЖ. 1966. Т. 11. № 3. С. 283–288.

- [242] HSU C.J. An exact mathematical solution for entrance region laminar heat transfer with axial conduction // Appl. Sci. Res. 1967. V. 17. P. 359–376.
- [243] PIRKLE J.C., SIGILLITO V.G. A variational approach to low Peclet number heat transfer in laminar flow // J. Comp. Phys. 1972. V. 9. P. 207–221.
- [244] MICHELSSEN M.L., VILLADSEN J. The Graetz problem with axial heat conduction // Int. J. Heat Mass Trans. 1974. V. 17. № 11. P. 1391–1402.
- [245] JONES A.S. Extensions to the solution of the Graetz problem // Int. J. Heat Mass Trans. 1971. V. 14. № 4. P. 619–623.
- [246] АСТАВИН В.С., КОРОЛЕВ И.О., РЯЗАНЦЕВ Ю.С. О температуре потока в канале со скачком температуры на стенке // Изв. АН СССР: МЖГ. 1979. № 5. С. 194–198.
- [247] PAPOUTSAKIS E., RAMKRISHNA D., LIM H.C. The extended Graetz with Dirichlet wall boundary conditions // Appl. Sci. Res. 1980. V. 36. P. 13–34.
- [248] PAPOUTSAKIS E., RAMKRISHNA D., LIM H.C. The extended Graetz problem with prescribed wall flux // AIChE J. 1980. V. 26. № 5. P. 779–787.
- [249] WEIGAND B. An exact analytical solution for the extended turbulent Graetz problem with Dirichlet wall boundary conditions for pipe and channel flows // Int. J. Heat Mass Trans. 1996. V. 39. № 8. P. 1625–1637.
- [250] WEIGAND B., KANZAMAR M., BEER H. The extended Graetz problem with piecewise constant wall heat flux for pipe and channel flows // Int. J. Heat Mass Trans. 2001. V. 44. № 20. P. 3941–3952.
- [251] WEIGAND B., EISENSCHMIDT K. The extended Graetz problem with piecewise constant wall temperature for laminar and turbulent flows through a concentric annulus // Int. J. Thermal Sci. 2012. V. 54. P. 89–97.

- [252] EBADIAN M.A., ZHANG H.Y. An exact solution of extended Graetz problem with axial heat conduction // Int. J. Heat Mass Trans. 1989. V. 32. № 9. P. 1709–1717.
- [253] JOHNSTON P.R. A solution method for the Graetz problem for non-newtonian fluids with Dirichlet and Neumann boundary conditions // Math. Comp. Modelling. 1994. V. 19. № 2. P. 1–19.
- [254] TELLES A.S., QUEIROZ E.M., FILHO G.E. Solutions of the extended Graetz problem // Int. J. Heat Mass Trans. 2001. V. 44. № 2. P. 471–483.
- [255] COELHO R.M.L., TELLES A.S. Extended Graetz problem accompanied by Dufour and Soret effects // Int. J. Heat Mass Trans. 2002. V. 45. № 15. P. 3101–3110.
- [256] БИРКГОФ Г. Гидродинамика. М.: ИЛ, 1963. 244 с.
- [257] ОВСЯННИКОВ Л.В. Группы и инвариантно–групповые решения дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1958. Т. 118. № 3. С. 439–442.
- [258] ОВСЯННИКОВ Л.В. Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 3. С. 45–52.
- [259] ЧУПАХИН А.П. О барохронных движениях газа // Доклады РАН. 1997. Т. 352. № 5. С. 624–626.
- [260] ОВСЯННИКОВ Л.В. О ”простых” решениях уравнений динамики полиропного газа // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 2. С. 5–12.
- [261] ГОЛОВИН С.В. Точные решения для эволюционных подмоделей газовой динамики // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 4. С. 3–14.
- [262] БУЧНЕВ А.А. Группа Ли, допускаемая уравнениями движения идеальной несжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды. 1971. Вып. 7. С. 212–214.
- [263] ШАНЬКО Ю.В., КАПЦОВ О.В. Оптимальные системы подалгебр и инвариантные решения ранга два для трехмерных уравнений Эйлера // Дифф. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1814–1819.

- [264] БЫТЕВ В.О. Групповые свойства уравнений Навье–Стокса // Численные методы механики сплошной среды. 1972. Т. 3, № 5. С. 13–17.
- [265] FUSHCHYCH W., POPOWYCH R. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier-Stokes equations. I // Nonlinear mathematical physics. 1994. V. 1, № 1. P. 75–113.
- [266] FUSHCHYCH W., POPOWYCH R. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier-Stokes equations. II // Nonlinear mathematical physics. 1994. V. 1, № 2. P. 158–188.
- [267] ПУХНАЧЕВ В.В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 1. С. 6–76.
- [268] BYTEV V.O. Building of mathematical models of continuum media on the basis of the invariance principle // Acta Appl. Math. 1989. V. 16. № 1. P. 117–142.
- [269] КАТКОВ В.Л. Точные решения некоторых задач конвекции // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 3. С. 482–487.
- [270] ГОНЧАРОВА О.Н. Групповая классификация уравнений свободной конвекции // Динамика сплошной среды. 1987. Вып. 79. С. 22–35.
- [271] ПУХНАЧЕВ В.В. Модель конвективного движения при пониженной гравитации // Моделирование в механике. 1992. Т. 6 (23). № 4. С. 47–56.
- [272] АНДРЕЕВ В.К., БЕКЕЖАНОВА В.Б. Об устойчивости равновесия плоского слоя в модели микроконвекции // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 2. С. 43–53.
- [273] БЕКЕЖАНОВА В.Б. Об устойчивости стационарного течения в вертикальном слое в модели микроконвекции // Изв. РАН: МЖГ. 2004. № 2. С. 57–68.
- [274] БАЙДУЛОВ В.Г., ЧАШЕЧКИН Ю.Д. Инвариантные свойства уравнений движения стратифицированных жидкостей // Доклады РАН. 2002. Т. 387. № 6. С. 760–763.

- [275] АНДРЕЕВ В.К. Об инвариантных решениях уравнений термодиффузии // Труды III международной конференции "Симметрия и дифференциальные уравнения". Красноярск, 2002. С. 13–17.
- [276] АНДРЕЕВ В.К. Решение Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения. Препринт № 1–10. ИВМ СО РАН. Красноярск, 2010. 68 с.
- [277] АНДРЕЕВ В.К., СОВАЧКИНА Н.Л. Движение бинарной смеси в плоских и цилиндрических областях. Красноярск: СФУ, 2012. 188 с.
- [278] WITTKO G., KÖHLER W. On the temperature dependence of thermal diffusion of liquid mixtures // Eur. Phys. Lett. 2007. V. 78. 46007.
- [279] ВЛАДИМИРОВ В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
- [280] Chemical engineers' handbook, 4th Edition. Edited by Perry R.H., Chilton C.H., Kirkpatrick S.D. New York: McGraw-Hill, 1963. 1915 p.
- [281] СТАБНИКОВ В.Н. Перегонка и ректификация этилового спирта. М.: Пищевая промышленность, 1969. 456 с.
- [282] HAMMOND B.R., STOKES R.H. Diffusion in binary liquid mixtures. Part I. Diffusion coefficients in the system ethanol + water at 25°C // Trans. Faraday Soc. 1953. V. 49. P. 890–895.
- [283] KÖNIGER A., MEIER B., KÖHLER W. Measurement of Soret, diffusion and thermal diffusion coefficients of three binary organic benchmark mixtures and of ethanol–water mixtures using a beam deflection technique // Philos. Magazine. 2009. V. 89. № 10. P. 907–923.
- [284] CABRERA H., SIRA E., RAHN K., GARCÍA–SUCRE M. A thermal lens model including the Soret effect // Appl. Phys. Lett. 2009. V. 94. 051103.
- [285] MILLER D.G., VITAGLIANO V., SARTORIO R. Some comments on multicomponent diffusion: negative main term diffusion coefficients, second law constraints, solvent choices, and reference frame transformations // J. Phys. Chem. 1986. V. 90. № 8. P. 1509–1519.

- [286] BLANCO P., BOU-ALI M.M., PLATTEN J.K., MEZQUIA D.A., MADARIAGA J.A., SANTAMARÍA C. Thermodiffusion coefficients of binary and ternary hydrocarbon mixtures // *J. Chem. Phys.* 2010. V. 132. 114506.
- [287] СИДОРОВ А.Ф., ШАПЕЕВ В.П., ЯНЕНКО Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
- [288] МЕЛЕШКО С.В. Групповая классификация уравнений двумерных движений газа // *ПММ*. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 56–62.
- [289] STEPANOVA I.V. Group classification for equations of thermodiffusion in binary mixture // *Commun. in nonlinear science and numerical simulation*. 2013. V. 18. № 6. P. 1341–1346.
- [290] GUPTA P.K., COOPER A.R. The [D] matrix for multicomponent diffusion // *Physica*. 1971. V. 54. № 1. P. 39–59.
- [291] LIU J., AHLERS G. Rayleigh–Bénard convection in binary–gas mixtures: thermophysical properties and the onset of convection // *Phys. Rev E*. 1997. V. 55. P. 6950–6968.
- [292] ГОДУНОВ С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математ. наук. 1961. Т. 16. № 3. С. 171–174.
- [293] КОРН Г., КОРН Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
- [294] CERBINO R., MAZZONI S., VAILATI A., GIGLIO M. Scaling behavior for the onset of convection in a colloidal suspension // *Phys. Rev. Lett.* 2005. V. 94. 064501.
- [295] SHLIOMIS M.I., SOUHAR M. Self-oscillatory convection caused by the Soret effect // *Europhys. Lett.* 2000. V. 49. P. 55–61.
- [296] ECENARRO O., MADARIAGA J.A., NAVARRO J.L., SANTAMARÍA C.M., CARRIÓN J.A., SAVIRÓN J.M. Thermogravitational separation and the ther-

- mal diffusion factor near critical points in binary liquid mixtures // J. Phys.: Condens. Matter. 1993. V. 5. P. 2289–2294.
- [297] DRAZIN P.G., REID W.H. Hydrodynamic stability. New York: Cambridge Univeristy Press, 2004. 605 p.
- [298] ЗАЙЦЕВ В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
- [299] KNOBLOCH E. Convection in binary fluids // Phys. Fluids. 1980. V. 23. P. 1918–1920.
- [300] ГЛИНКА Н.Л. Общая химия. Л.: Химия, 1977. 720 с.
- [301] NIST Chemistry Webbook, 2011. <http://webbook.nist.gov/chemistry>.
- [302] MORELL R. Handbook of properties of technical and egingineering ceramics. Part 2. Data reviews. Section 1. High-alumina ceramics. London, 1987. 255 p.
- [303] KINGERY W.D., BOWEN H.K., UHLMANN D.R. Introduction to Ceramics. 2nd Ed. John Wiley & Sons, New York, 1976. 1056 p.
- [304] WILLIAMS W.C., BUONGIORNO J., HU L.W. Experimental investigation of turbulent convective heat transfer and pressure loss of alumina/water and zirconia/water nanoparticle colloids (nanofluids) in horizontal tubes // J. Heat Transfer. 2008. V. 130. 042412.
- [305] SOHN C.H., KIHM K.D. Nonhomogeneous modelling of thermofluidic energy transport accounting for thermophoretic migration of nanoparticles inside laminar pipe flows // J. Korean Phys. Soc. 2009. V. 55. № 5. P. 2200–2208.
- [306] AVRAMENKO A.A., BLINOV D.G., SHEVCHUK I.V. Self-similar analysis of fluid flow and heat–mass transfer of nanofluids in a boundary layer // Phys. Fluids. 2011. V. 23. 082002.
- [307] IACOPINI S., RUSCONI R., PIAZZA R. The 'macromolecular tourist': Universal temperature dependence of thermal diffusion in aqueous suspensions // Europ. Phys. J. E. 2006. V. 19. P. 59–67.

- [308] BRAIBANTI M., VIGOLO D., PIAZZA R. Does thermophoretic mobility depend on particle size? // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. 108303.
- [309] GIDDINGS J.C., SHINUDU P.M., SEMENOV S.N. Thermophoresis of metal particles in liquids // J. Colloid and Interface Sci. 1995. V. 176. P. 454–458.
- [310] LENGLER J., BOURDON A., BACRI J.C., DEMOUCHY G. Thermodiffusion in magnetic colloids evidenced and studied by forced Rayleigh scattering experiments // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. 031408.
- [311] ALVES S., CUPPO L.S'A., BOURDON A., NETO A.M.F. Thermodiffusion of magnetite nanoparticles in ferrofluid-doped micellar systems and in ferrofluids investigated by using the single-beam Z-scan technique // J. Opt. Soc. Am. B. 2006. V. 23. № 11. P. 2328–2335.
- [312] XU J-J., DAVIS S.H. Convective thermocapillary instabilities in liquid bridges // Phys. Fluids. 1984. V. 27. № 5. P. 1102–1107.
- [313] ТАТАРЧЕНКО В.А. Устойчивый рост кристаллов. М.: Наука, 1988. 240 с.
- [314] Crystal growth processes based on capillarity. Edited by Duffar T. Jhon Wiley & Sons, 2010. 533 p.
- [315] KUHLMANN H.C. Thermocapillary Convection in Models of Crystal Growth. Springer Verlag, Berlin, 1999. 224 p.
- [316] XU J-J., DAVIS S.H. Liquid bridges with thermocapillarity // Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 10. P. 2880–2886.
- [317] SCHWABE D. Hydrodynamic instabilities under microgravity in a differentially heated long liquid bridge with aspect ratio near the Rayleigh-limit: Experimental results // Adv. Space Res. 2005. V. 36. P. 36–42.
- [318] SCHWABE D. Hydrothermal waves in a liquid bridge with aspect ratio near the Rayleigh limit under microgravity // Phys. Fluids. 2005. V. 17. № 11. 112104.

- [319] WANSCHURA M., SHEVTSOVA V.M., KUHLMANN H.C., RATH H.J. Convective instability mechanisms in thermocapillary liquid bridges // Phys. Fluids. 1995. V. 7. № 5. P. 912–925.
- [320] АНДРЕЕВ Б.К., ЗАХВАТАЕВ Б.Е., РЯБИЦКИЙ Е.А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000. 280 с.
- [321] KAMOTANI Y., MATSUMOTO S., YODA S. Recent developments in oscillatory Marangoni convection // Fluid Dynamics and Materials Processing. 2007. V. 3. № 2. P. 147–160.
- [322] FERRERA C., MONTANERO J.M., MIALDUN A., SHEVTSOVA V.M., CABEZAS M.G. A new experimental technique for measuring the dynamical free surface deformation in liquid bridges due to thermal convection // Meas. Sci. Technol. 2008. V. 19. 015410.
- [323] Industrial solvents handbook. 5th Edition. Edited by Flick E.W. Noyes data corporation, 1998. 963 p.
- [324] Справочник химика. Том 1. Под редакцией Б.П. Никольского. М.: Химия, 1966. 1072 с.
- [325] ИСАЧЕНКО В.П., ОСИПОВА В.А., СУКОМЕЛ А.С. Теплопередача. М.: Энергия, 1975. 488 с.
- [326] PALLARES J., ARROYO M.P., GRAU F.X., GIRALT F. Experimental laminar Rayleigh–Bénard convection in a cubical cavity at moderate Rayleigh and Prandtl numbers // Exper. in Fluids. 2001. V. 31. P. 208–218.
- [327] MELNIKOV D.E., SHEVTSOVA V.M. Liquid particles tracing in three-dimensional buoyancy–driven flows // Fluid Dynamics and Materials Processing. 2005. V. 1. № 2. P. 189–199.